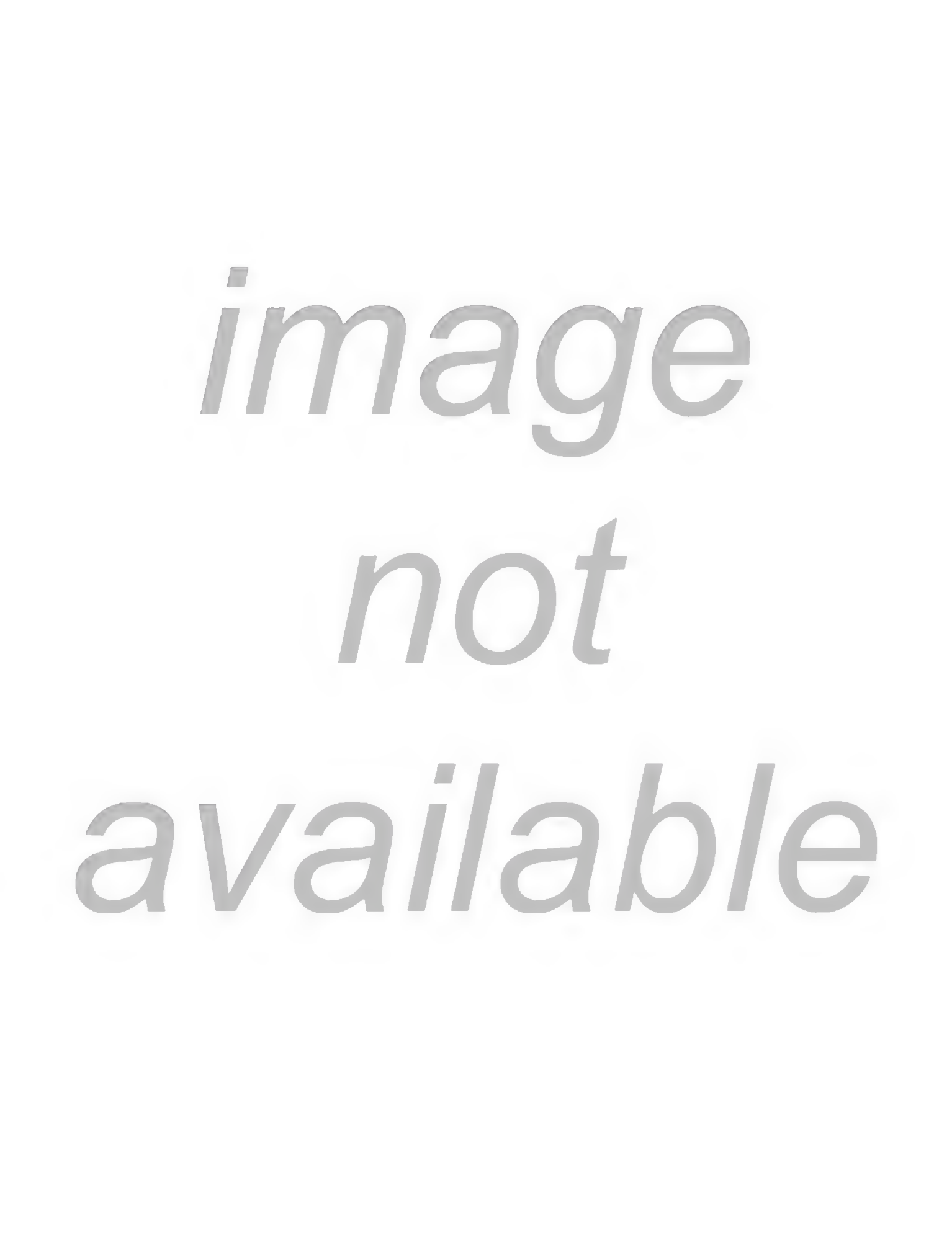
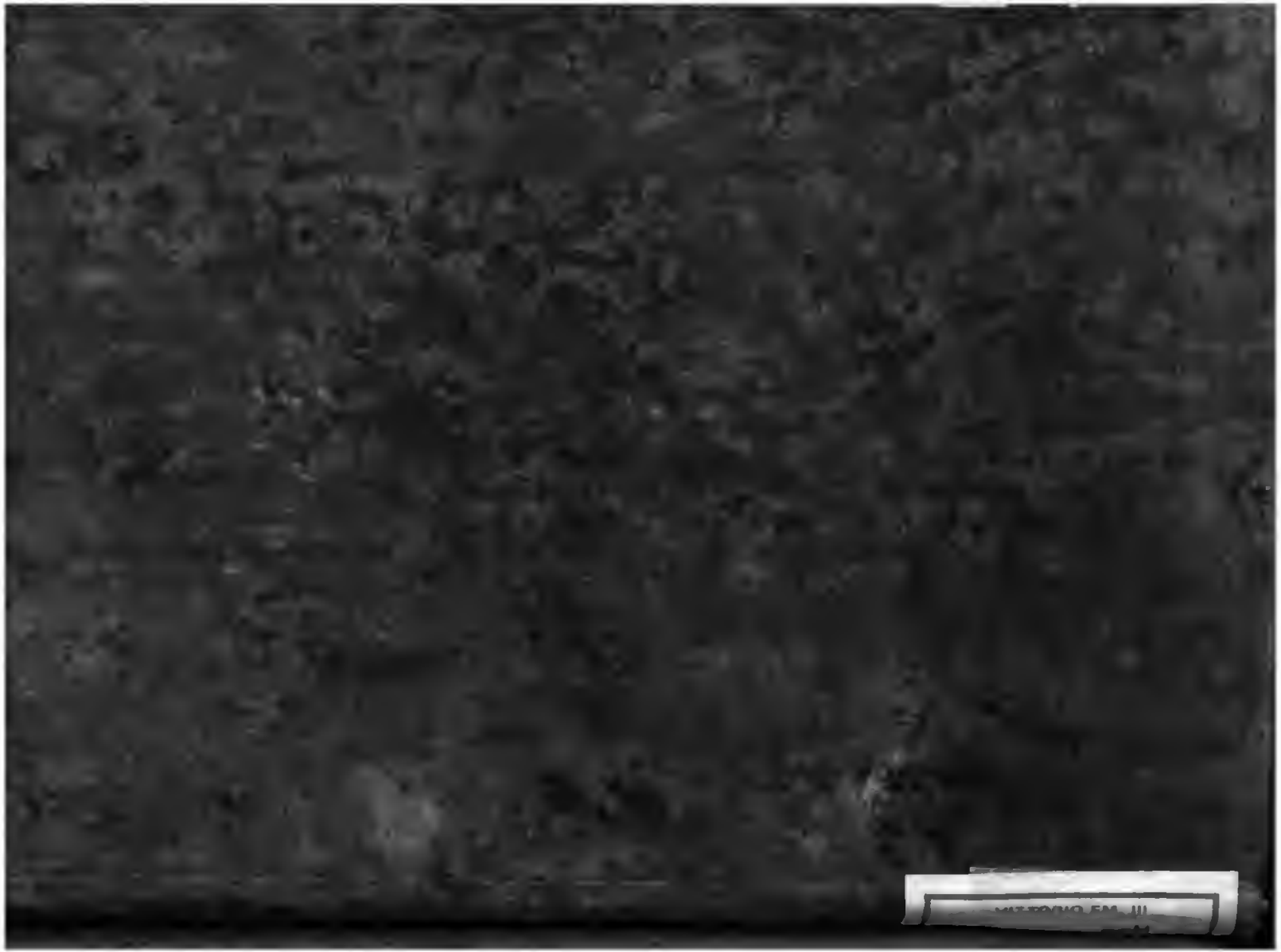


image
not
available



ONDO PIZZOFALCONE

37-D-43

BIBLIOTECA PROVINCIALE

37-D-44

Armadio

Palchetto

Num.° d' ordine

NAZIONALE
B. Prov.
I
1964
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III

B. Prov.
I
1904

ÉLÉMENS

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

C08103

ÉLÉMENS

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

PAR J.-G. GARNIER,

Ancien Professeur à l'École Polytechnique, et Instituteur, à Paris.

BIBLIOTECA

In scientiis addiscendis, exempla prosunt magis quàm præcepta.
NEWTON, Arith. univ.

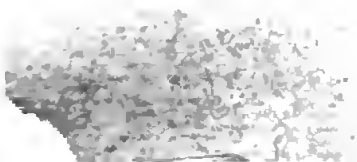
BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE NAPOLI

A PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1808.

Digitized by Google



AVERTISSEMENT.

M. *Lacroix*, dans un excellent Ouvrage que j'ai déjà eu occasion de citer, et qui a pour titre: *Essais sur l'Enseignement*, a posé et résolu cette question: *Que doit comprendre un Traité d'Application de l'Algèbre à la Géométrie, lorsqu'on le destine à des élèves qui, pour se livrer ensuite aux questions physico-mathématiques, se préparent à recevoir sur l'analyse et la mécanique transcendantes, des leçons conformes à l'état actuel de ces sciences?* N'ayant rien à ajouter à ce que dit ce Géomètre, nous nous bornerons à conseiller de nouveau la lecture de ce livre précieux par l'érudition, les préceptes et les vues. Cependant je dirai un mot en réponse à une opinion du même Géomètre, énoncée en ces termes, page 382 du même ouvrage: *On voit aussi qu'il ne convient pas aujourd'hui de considérer d'abord le cône pour amener les courbes du second degré, car pourquoi commencer par cette surface plutôt que par toute autre?* Mais suivant que l'on considère ces courbes comme des sections coniques, ou comme des lignes du second ordre, on doit les chercher dans le cône, ou les tirer de l'équation la plus générale du second degré entre deux variables; reste ensuite à constater, si l'on veut,

l'identité des résultats obtenus par ces deux voies. Il ajoute : *Et quand même on emploierait son équation (celle de l'intersection du cône), on ne ferait encore que de l'algèbre, et non pas de l'analyse.* Mais en écrivant, qu'on présente un plan variable de position au même cône, on se rapproche des anciens, en même temps qu'on applique l'Algèbre à la Géométrie, ce qui ne peut être un inconvénient. Au reste, les professeurs qui regarderaient la surface du cône comme un élément étranger, ou d'un ordre supérieur, pourraient passer le chapitre sixième, qui n'est pas indispensable pour l'intelligence de ce qui suit, et s'en tenir au chapitre septième.

Nous indiquerons aussi aux lecteurs, l'avant-propos de l'exposition d'une méthode pour construire les équations indéterminées du second degré, qui se rapportent aux sections coniques, par *Prony*.

Je suis loin de croire que j'ai réalisé ce vœu exprimé par M. *Biot*, dans la préface de son Essai de Géométrie analytique ; *je m'estimerais heureux si ce petit Ouvrage, après avoir été utile aux élèves, donnait naissance à quelqu'autre plus parfait, auquel je serai le premier à applaudir :* j'aime à convenir que je n'aurais pas même eu la pensée d'écrire sur cette matière, s'il ne l'eût traitée avant moi ; je saisirai donc cette occasion de lui voter à mon tour des remercîmens plus mérités sans doute que ceux qu'il a cru me devoir

pour quelques observations qui ne pouvaient lui échapper lors d'une révision de son ouvrage.

J'ai tiré tout le parti possible du petit Traité de M. *Lefrançois*, ancien élève de l'École Polytechnique, et maintenant officier d'artillerie. Je m'explique, parce que si l'on m'a accoutumé aux dénis de justice, je n'ai pas le droit d'exiger des autres la même résignation. *Lefrançois* n'a fait, à proprement parler, qu'une esquisse, mais c'est une esquisse qui laisse des regrets; et surtout on desirerait que l'Auteur eût approprié son livre aux besoins des élèves qui se destinent à l'École Polytechnique, et qu'aussi il eût morcelé les questions, c'est-à-dire, qu'il les eût traitées individuellement.

L'impression de mon Ouvrage était presque terminée, lorsque je reçus celui de M. *Boucharlat*, autre élève de la même École; je n'ai donc pu rien emprunter de ce Traité qui, ne renfermant ni le plan ni les surfaces, n'est qu'une partie du mien plus complet encore à d'autres égards.

Je reconnais avec plaisir que je dois à M. *Dinet*, mon ami, l'idée de l'analyse qui m'a servi à déduire de l'équation générale des courbes du premier ordre, celles des asymptotes; et, en partie, celle des sections du cône, à M. *Puissant*, géomètre connu par des ouvrages qui me dispensent de tout éloge.

Rédiger un Traité de Géométrie analytique,

c'est, en quelque sorte, écrire sous la dictée de *Monge* : aussi verra-t-on que les chapitres IV et VII sont extraits en partie d'un mémoire ayant pour titre : *Surfaces du premier et du second degrés*, à l'usage de l'École Polytechnique, par MM. *Monge* et *Hachette*, lequel est suivi de deux notes par MM. *Hachette* et *Poisson*.

Telles sont les sources dans lesquelles j'ai puisé une partie des matériaux du Traité que j'offre aux élèves; il se recommandera encore par les applications, et en cela, je n'ai fait que me conformer au conseil donné et suivi par *Newton*, dans son Arithmétique universelle : *in scientiis enim addiscendis, prosunt exempla magis quàm præcepta.* Bien convaincu de cette vérité, que la pierre de touche de ces sortes d'ouvrages, est l'enseignement, j'invoque les observations des professeurs qui voudront bien faire de celui-ci le texte de leurs leçons.

Je terminerai par quelques distinctions qui ne paraîtront pas inutiles. Toute équation entre deux variables représente une ligne; toute équation entre trois variables est à une surface. Cette ligne et cette surface sont dites du premier, du second, etc. degré, suivant que l'équation est elle-même du premier, du second, etc. degré. Au premier degré appartiennent la ligne droite et la surface plane; viennent ensuite les lignes et les surfaces courbes qu'on classe par ordre, ensorte que celles du second degré forment le premier ordre, celles du troisième

forment le second ordre, et ainsi de suite. Les sections coniques sont donc des lignes du second degré, ou des courbes du premier ordre : à la vérité, ces dénominations n'ont pas été généralement adoptées ou plutôt employées par les Auteurs. Aussi M. *Dubourguet*, dans des observations sur l Ouvrage de M. *Biot*, qui pèchent un peu par la forme, n'a-t-il pas manqué de relever la dénomination : *Courbes du second degré*, très-fausse suivant lui, quoiqu'elle ne puisse faire équivoque.

TABLE
DES MATIÈRES.

INTRODUCTION, Page 1

II. Élémens de position d'un point dans un plan; notation algébrique de ces élémens; équation d'une droite dans un plan; problèmes, 13

III. Élémens de position d'un point dans l'espace : notation algébrique de ces élémens. Équation de la ligne droite dans l'espace; problèmes, 42

IV. De l'équation du plan; problèmes, 58

V. De la transformation des coordonnées, à deux et à trois dimensions, 81

VI. Équation de l'intersection de la surface conique par un plan variable de position, 86

VII. Construction et discussion de l'équation générale du second degré à deux indéterminées, 102

1°. Courbes limitées dans tous les sens; exemples, 109

2°. Courbes limitées dans un sens, et indéfinies dans l'autre; exemples, 115

3°. Courbes indéfinies dans tous les sens; exemples, 122

4°. Des Asymptotes, 125

VIII. Réduction de l'équation générale à l'une ou à l'autre de ces formes

$My^2 + Nx^2 + P = 0$, $My^2 + Nx^2 + Px = 0$;

c'est-à-dire, des courbes du premier ordre au centre ou au sommet, et à des axes rectangulaires; exemples, 136

IX. Des diamètres conjugués; applications, 153

X. Théorèmes généraux sur les courbes du premier ordre et problèmes, 169

XI. Des tangentes, normales, soutangentes, sounormales aux courbes du premier ordre; problèmes, 178

XII. Du cercle, 190

XIII. Propriétés de l'ellipse, 199

XIV. Propriétés de la parabole, 227

XV. Propriétés de l'hyperbole, 234

CHAP. XVI. De la quadrature des courbes du premier ordre, Page 253
XVII. Des surfaces courbes du premier ordre, 262
1°. Surface limitée dans tous les sens, ou ellipsoïde, 271
2°. Surfaces indéfinies dans tous les sens, 273
3°. Des surfaces dépourvues de centre, ou définies dans un sens et limitées dans l'autre, 279
4°. Des plans tangens aux surfaces courbes du premier ordre, 285
5°. Applications des courbes considérées dans l'espace, 299
XVIII. Rayons de courbure des courbes du premier ordre. 309
Première note sur le plan, 311
Deuxième note, 312

FIN DE LA TABLE.

Fautes essentielles à corriger.

Pages.	Lignes.	Fautes.	Corrections.
5	8	Oy.....	OY.
14	5 en r.	$y = b$	$y = 0$.
23	8		$= \infty$.
Idem.	11	$x = x''$ $y = y''$.....	$x' = x''$ $y' = y''$.
24	3 en r.	(3) de (1).....	(3) de (2).
29	7	$y - y' - a'$ ( ).....	$y - y' = a'$ ( ).
35	3	$M'AC$.....	$M'A'C'$.
40	8 en r.	$P'L'$.....	$p'L'$.
50	4	$P''M'''$.....	$p''M''$.
56	5	$z =$.....	$z' =$
64	dernière	$z = Ax + \zeta y + D$.....	$z = Ax + By + D$.
66	4 en r.	C.....	D.
71	3 en r.	.....	$H = -$
Id.	dernière	.....	$\frac{D}{6} = -$
95	11 en r.	ou $y^2 = 2px'$.....	on $y^2 = 2px$.
108	12	AP, PM'.....	AP, PM.
112	6	Cb ou Cb'.....	cb ou cb'.
161	13 en r.	conjugués sont.....	conjugués font.
169	en titre	sur les courbes du premier degré.....	sur les courbes du premier ordre.
178	en titre	aux courbes du premier degré.....	aux courbes du premier ordre.
206 et 207	n° 105.	.....	changez partout F en f.
221	5	l'ordonnée CR..... ..	l'ordonnée CR''.
228	dernière	OD, od.....	OD, Od.
229	8	OD, od.....	OD, Od.
231	dernière	le point de tangence $M'F'$	le point de tangence M'.
232	6 en r.	$M'Pm'$.....	$M'P'm'$.
233	14	MN.....	Mm.
241	dernière	$F't' < F'K + Kt$.....	$F't' < F'K + Kt'$.
249		.....	l'indication de la figure 92 correspond à la dernière ligne de la conclusion, en lettres italiques.
271	prem.	surface illimitée, etc.....	surface limitée.

Nota. Dans les fig. 63 et 64, le diamètre FH ne doit pas passer par les sommets de la courbe.

ÉLÉMENS
DE GÉOMÉTRIE
ANALYTIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

INTRODUCTION.

1. PLACER *dans l'angle droit* EAF *une droite donnée* EF, *de manière que cette droite prolongée passe par un point donné* C *également éloigné des deux lignes* AB, AD. Fig. 1.

SUPPOSONS le problème résolu, c'est-à-dire, la droite *CF* dans la position cherchée : les distances égales *CB* et *CD* sont connues, nous les désignerons par *a*, et nous représenterons par *b* la moitié FG de la ligne donnée *EF* : on peut prendre pour inconnue la longueur *CG*, parce que de *CG* on peut conclure *CE* ou *CF*, c'est-à-dire un autre point *E* ou *F* de la droite cherchée. Nous ferons donc $CG = x$. On a

$$\overline{CF}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{BF}^2,$$

et conséquemment

$$BF = \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2};$$

les triangles semblables CDE, FBC donnent

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{BF}, \text{ ou } \frac{x-b}{a} = \frac{x+b}{\sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}};$$

faisant disparaître le radical, et ordonnant suivant les puissances de x, on est conduit à cette équation du quatrième degré

$$x^4 = 2(a^2 + b^2)x^2 + 2a^2b^2 - b^4$$

qui, résolue par la méthode du second, donne

$$x^2 = a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 + 4a^2b^2},$$

et enfin

$$x = \pm \sqrt{a^2 + b^2 \pm a\sqrt{a^2 + 4b^2}}.$$

Mais on aurait pu prendre CE pour inconnue, et poser $CD = a$, $EF = b$, $CE = x$: alors on a

$$BF = \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2};$$

d'ailleurs

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{BF}, \text{ ou } \frac{x}{a} = \frac{x+b}{\sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}};$$

élevant au carré et ordonnant, on parvient à l'équation

$$x^4 + 2bx^3 + (b^2 - 2a^2)x^2 - 2a^2bx - a^2b^2 = 0$$

qui est plus composée que la précédente. Pour faire du premier membre un carré parfait, on ajoutera de part et d'autre $a^4 + a^2b^2$, et on aura

$$x^4 + 2bx^3 + (b^2 - 2a^2)x^2 - 2a^2bx + a^4 = a^4 + a^2b^2;$$

extrayant la racine de chaque membre, il vient

$$x^2 + bx - a^2 = \pm a\sqrt{a^2 + b^2},$$

et enfin

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{a^2 + b^2}}}{2}.$$

Il est facile de reconnaître que le nombre des solutions est moindre que celui des racines.

Nous rapporterons ici la règle que donne *Newton* dans son *Arithmétique universelle*, à l'occasion même de cette solution.

Lorsque deux termes ont une telle ressemblance de rapport avec les autres termes de la question, qu'en prenant l'un ou l'autre, on arrive à des équations semblables, ou qu'en les prenant tous deux en même temps, ils aient dans l'équation finale le même nombre de dimensions, et la même forme, et ne diffèrent peut-être que par les signes + ou —, il faut les rejeter tous deux, et prendre à leur place un troisième terme qui ait un même rapport avec l'un et l'autre, par exemple, leur demi-somme, ou leur demi-différence, ou une moyenne proportionnelle, ou enfin telle autre quantité qu'on voudra, qui ait avec eux une même relation, pourvu que cette quantité soit la seule qui jouisse de cette propriété.

Ce grand géomètre ajoute : « C'est ainsi que, dans le problème précédent, ayant remarqué que la ligne EF avait même relation avec AB et AD, comme on peut s'en assurer en menant EF dans l'angle BAH, et qu'ainsi il n'y avait pas de raison de prendre pour inconnue ED plutôt que BF, ou AE plutôt que AF, ou CE plutôt que CF; au lieu des points E et F qui causaient toute l'incertitude, j'ai pris, dans la première solution, le point G qui coupe EF en deux parties égales, et comme CG est liée par la même relation avec AB et AD, et qu'il n'existe aucun autre quantité qui soit dans ce cas, j'ai dû prendre CG pour inconnue: de cette ma-

nière, j'ai été conduit à une équation du quatrième degré, qui ne renferme pas de puissances impaires de l'inconnue ; on voit bien qu'il y aurait eu lieu à la première incertitude, si ayant pris le point G, j'avais cherché une inconnue, au moyen d'une perpendiculaire abaissée de ce point sur AF, parce que j'aurais pu en abaisser une sur AD ; par la même raison, je n'en ai abaissé ni sur CB ni sur CD. »

Newton trace encore la solution suivante, remarquable par sa simplicité : dn point F milieu de EF, élevez une perpendiculaire GK snr la ligne CA prolongée, et dn même point G décrivez avec GE, comme rayon, la demi-circonférence ETF qui passera par A : la ligne TG sera perpendiculaire sur EF et les deux triangles rectangles semblables TCG, TKG donneront

Fig. 1.

$$\frac{CT}{TG} = \frac{TG}{TK} = \frac{TG}{AK} :$$

si l'on fait $AC = e$, $TG = b$, $AK = y$, on aura

$$CT = AC + 2AK = e + 2y,$$

et conséquemment

$$\frac{e+2y}{b} = \frac{b}{y}, \text{ d'où } y^2 = -\tfrac{1}{2}ey + \tfrac{1}{2}b^2$$

équation qui indique deux solutions.

Les droites PD *et* BD *dont le rapport est donné, étant menées comme on voudra dans l'angle connu* PA'B, *sous la condition que* BD *soit toujours parallèle à* A'P, *et que* PD *se termine toujours au point* D *donné, on demande le lieu du point* P, *intersection des droites.*

Fig. 2.

Menons AX et CD parallèlement aux lignes $A'P$ et AB, puis DE perpendiculairement à $A'P$; faisons ensuite $A'P = a$, $DC = y$, $CC' = AA' = b$, $C'P = x$, ...

$C'D = DC - CC' = y - b$; et représentons par $\frac{d}{e}$ le rapport de BD à DP : on aura $A'C = BD = a - x$; . . . . . .

$PD = \frac{ae - ex}{d}$: soit, en outre, à cause de l'angle donné $DC'E$, le rapport $\frac{C'D}{C'E} = \frac{d}{f}$; ce qui donnera $C'E = \frac{f(y-b)}{d}$, d'où $EP = x - \frac{f(y-b)}{d}$: mais parce que l'angle en E est droit,

$$\overline{C'D}^2 - \overline{C'E}^2 = \overline{DE}^2 = \overline{DP}^2 - \overline{EP}^2$$

développant et ordonnant, il vient

$$d^2y^2 + 2fdxy - (e^2 - d^2)x^2 - 2bd^2y + 2(ae^2 + fbd)x + b^2d^2 - a^2e^2 = 0.$$

Ainsi ayant mené par le point P une parallèle Oy à AB, auquel cas $CO = C'P = x$, l'équation que nous venons de trouver, exprimera la relation entre les lignes OC et CD qui donnent la position des points D pour lesquels on a la propriété énoncée. Pour une valeur attribuée à x, on aura une valeur correspondante de y, donnée par la résolution de cette équation; portant la première de O en C, par exemple, et menant par C une parallèle indéfinie à AB, on prendra $CD = y$. Nous verrons plus loin que le lieu du point D, est à une section conique.

Si un angle donné CAD *ne peut que tourner autour du point* A *donné de position*; *si l'angle donné* CBD *ne peut avoir qu'un mouvement de rotation autour du point* B *donné de position, et que les deux angles tournent en effet sous la double condition énoncée, en supposant de plus que les côtés* AD, BD *se coupent toujours sur une ligne droite* EF *donnée de position, il s'agit de déterminer la courbe des intersections* C *des deux autres côtés* AC, BC. Fig. 3.

Prolongez CA jusqu'en d, de manière que $Ad = AD$; prolongez aussi CB jusqu'en δ, ensorte que $B\delta = BD$; faites l'angle $Ade = ADE$, et l'angle $B\delta f = BDF$, et prolongez

de part et d'autre la droite AB, jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite de en e et δf en f; prolongez aussi ed jusqu'en G, de telle manière que $dG = \delta f$; et du point C menez CH parallèlement à ed, et CK parallèlement à δf : si l'on conçoit que les lignes eG, $f\delta$ demeurent immobiles, tandis que les angles CAD, CBD tournent, ainsi qu'on l'a supposé, autour des sommets A et B, on aura toujours $dG = \delta f$; et tous les angles du triangle CKH seront donnés. En effet, le point D étant donné de position, le point C l'est aussi : donc l'angle CAB est déterminé ainsi que son égal eAd; mais comme $Ade = ADE$, et $Ad = AD$, tout est connu dans le triangle Ade, et parce que CH est parallèle à de, l'angle CHK est le supplément de l'angle connu deA. On prouvera de la même manière que tout est connu dans le triangle $B\delta f$; et de ce que CK est parallèle à $f\delta$, on conclura que l'angle CKH est le supplément de l'angle connu $Bf\delta$. On connaît donc les rapports entre les côtés du triangle CHK : la même conclusion aurait lieu à l'égard du triangle $C'H'K'$ pour une autre position $C'AD'B$ du quadrilatère $CADB$: on voit qu'à cause de l'angle $dAd' = DAD'$, $d'dA = D'DA$, $dA = DA$, on a $dd' = DD'$; on prouverait de même que $\delta\delta' = DD'$: ainsi $d'G = \delta' f$, ou, en d'autres termes, pour toutes les positions du point C, $dG = \delta f$.

Soient $Ae = a$, $eG = b$, $Bf = c$, $AB = m$, $BK = x$, $CK = y$; on aura

$$BK : CK :: Bf : \delta f = \frac{cy}{x} = dG;$$

retranchant cette quantité de Ge, le reste sera

$$de = b - \frac{cy}{x}.$$

Dans le triangle CHK dont on connaît les angles, on peut

supposer

$$\frac{CK}{CH}=\frac{d}{e},\quad \frac{CH}{HK}=\frac{e}{f},$$

et on aura

$$CH=\frac{ey}{d},\quad HK=\frac{fy}{d};\ \text{donc}\ AH=m-x-\frac{fy}{d}.$$

On a de plus

$$AH : HC :: Ae : ed;$$

substituant les valeurs, égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, et ordonnant, on trouve

$$fey^2+(dc-ae-bf)xy-bdx^2-dcmy+bdmx=0,$$

équation du second degré entre deux variables, qui, comme nous le verrons plus loin, représente trois courbes dont une des générations est celle de l'énoncée.

Nous nous bornerons à ces trois exemples pris dans l'*Arithmétique universelle de Newton*, ouvrage qui vient d'être mis à la portée de tout lecteur, par l'excellente traduction de M. *Noël Baudeux*, accompagnée de notes explicatives.

2. Lorsqu'on a résolu par l'algèbre l'équation d'un problème de géométrie, les formules des racines indiquent les opérations à faire sur les lignes données; mais il faut concevoir que ces lignes aient été comparées à une autre ligne prise pour unité de mesure; les résultats de ces comparaisons sont des nombres sur lesquels on peut pratiquer les opérations de l'arithmétique, et la valeur numérique de l'inconnue est le nombre de fois qu'elle contient la même unité de mesure.

Qu'on ait donc été conduit à ce résultat

$$x=ab$$

qui est absurde, si a, b et x sont des lignes, il faudra les con-

cevoir sous cette forme

$$\frac{x}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1}$$

1 désignant l'unité linéaire : multipliant par 1^2, on trouve

$$1 \times x = ab;$$

de cette manière, l'homogénéité et le sens se trouvent rétablis.

C'est ainsi qu'on ramènera l'expression suivante

$$x = m^2 + \sqrt{m^3 - mn + p}$$

à être constructible : on écrira

$$\frac{x}{1} = \frac{m^2}{1^2} + \sqrt{\frac{m^3}{1^3} - \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} + \frac{p}{1}};$$

multipliant de part et d'autre par l'unité, on aura

$$x = \frac{m^2}{1} + \sqrt{\frac{m^3}{1} - mn + 1 \cdot p}.$$

Les produits mn, $1 \cdot p$ peuvent être transformés en des carrés f^2, g^2; le terme $\frac{m^3}{1}$ peut se décomposer en $\frac{m^2}{1} \cdot m$, et ayant cherché une ligne l troisième proportionnelle à 1, m et m, puis une moyenne proportionnelle entre l et m, le carré k^2 sera $\frac{m^3}{1}$, ensorte que

$$x = \frac{m^2}{1} + \sqrt{k^2 - f^2 + g^2}.$$

On trouvera par le triangle rectangle une ligne h telle que $h^2 = k^2 - f^2$, et par la même figure une ligne i, telle que $i^2 = h^2 + g^2$. Cette ligne i ajoutée à la troisième proportionnelle $\frac{m^2}{1}$, fera la longueur x cherchée.

Le peu d'exemples que nous offrirons, sera plus que suffisant pour mettre l'élève en état de construire les expressions même les plus compliquées, et dans ce cas, il vaut mieux recourir au calcul toujours plus expéditif, et qui donne toute l'approximation nécessaire. Nous ferons observer qu'il convient de chercher à lier avec la figure des données du problème, les opérations à effectuer pour en obtenir la solution. (Voyez l'*Arithmétique universelle.*)

On sait construire les expressions $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$; nous pouvons donc passer à la suivante

$$x = a \pm \sqrt{a^2+b^2};$$

par l'extrémité B d'une ligne $AB = b$, on élevera une perpendiculaire $BC = a$, et on mènera AE qui sera la longueur cherchée, puisqu'on a Fig. 4.

$$AE = CE + AC = a + \sqrt{a^2+b^2};$$

l'autre valeur de x, est

$$AD = AC - CD = a - \sqrt{a^2+b^2},$$

qu'il faudra prendre avec le signe —, c'est-à-dire, porter en sens contraire des solutions positives, puisqu'on a

$$\sqrt{a^2+b^2} > a.$$

Soit, en second lieu, la double expression

$$x = a \pm \sqrt{a^2-b^2};$$

Après avoir pris $AB = b$, on élevera par B la perpendiculaire $BC = a$, puis de C, comme centre, avec CB, comme rayon, on décrira une circonférence : menant alors par A une perpendiculaire indéfinie, les longueurs AD, AE seront les deux valeurs de x; car on aura Fig. 5.

$$AD = BF = BC - CF = a - \sqrt{a^2-b^2},$$

et $$AE = BG = BC + CF = a + \sqrt{a^2-b^2}.$$

Lorsque $b = a$, la ligne AE est tangente au cercle; si b est $> a$, la ligne AE sort du cercle, les intersections D, E, et conséquemment les racines sont imaginaires.

Construisons l'expression plus composée

$$x = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Fig. 6. avec $AB = b$, comme rayon, on décrira une circonférence; au point A on élevera la tangente $AT = a$, et on mènera la sécante BT: puis du point T, on prendra $TE = c$, et on mènera la parallèle ED au diamètre; les triangles semblables ABT, EDT donneront

$$AT : BT :: TE : TD,$$

c'est-à-dire,

$$a : \sqrt{a^2 + b^2} :: c : x = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Si l'on prend $AT = b$, $BT = a$, $DT = c$, et si par D on mène une parallèle à BA, on aura

$$BT : BA :: DT : x = \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Passons à l'expression

$$x = \frac{q^2}{p} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{p} + r\right)\frac{q^2}{p}}.$$

Après avoir pris une troisième proportionnelle aux lignes p et q, que nous appellerons m, il restera à construire

$$x = m \pm \sqrt{(m + r)\, m}$$

mais la partie radicale exprime une moyenne proportionnelle

qu'on trouvera par le cercle, et qu'il faudra ajouter à m, et retrancher de cette ligne.

Soit enfin

$$x = \frac{-2be^2 + d\sqrt{3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{9}{4}a^2d^2}}{4e^2 + 3d^2};$$

e et d étant les deux côtés d'un angle droit et f l'hypothénuse, on aura $f^2 = e^2 + d^2$: si dans le cercle décrit du rayon f, on inscrit un triangle équilatéral, en désignant son côté par g, on aura

$$g^2 = 3f^2 = 3e^2 + 3d^2 \ldots\ldots (m);$$

si dans le cercle décrit avec le rayon d, on inscrit encore un triangle équilatéral, en appelant h son côté, on aura

$$h^2 = 3d^2, \text{ ou } \frac{h^2}{4} = \frac{3d^2}{4};$$

et retranchant membre à membre de (m), il viendra

$$g^2 - \frac{h^2}{4} = 3e^2 + \frac{9d^2}{4} \ldots\ldots (n).$$

Après avoir construit une quatrième proportionnelle $k = \frac{be}{a}$, d'où $k^2 = \frac{b^2e^2}{a^2}$, on décrira avec le rayon k, un cercle dans lequel on inscrira un triangle équilatéral, et désignant son côté par l, on aura

$$l^2 = 3k^2 = \frac{3b^2e^2}{a^2};$$

retranchant membre à membre de (n), il viendra

$$g^2 - \frac{h^2}{4} - l^2 = \frac{3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{9a^2e^2}{4}}{a^2} \ldots (p).$$

Je construis au moyen du triangle rectangle, les valeurs

$$p^2 = \tfrac{1}{4}h^2 + l^2, \quad q^2 = g^2 - p^2 = g^2 - \tfrac{1}{4}h^2 - l^2,$$

et substituant dans (*p*), on trouve après les réductions,

$$\frac{adq}{4e^2+3d^2} = \frac{d\sqrt{3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{9}{4}a^2d^2}}{4e^2+3d^2}.$$

Qu'on construise

$$r^2 = 4e^2 + h^2 = 4e^2 + 3d^2,$$

$$t = \frac{aq}{r} \times \frac{d}{r} = \frac{adq}{4e^2+3d^2},$$

$$v = \frac{2be}{r}, \quad \delta = \frac{ve}{r} = \frac{2be^2}{r^2} = \frac{2be^2}{4e^2+3d^2};$$

et on aura $t - \delta = x$.

3. Lorsqu'il n'entre que des lignes dans l'énoncé d'une question, et que la quantité cherchée est elle-même une ligne, son expression renferme toujours, dans le cas de l'homogénéité, une dimension de plus au numérateur qu'au dénominateur, deux ou trois dimensions de plus, si l'inconnue est une surface, ou un volume.

CHAPITRE II.

Élémens de position d'un point dans un plan; notation algébrique de ces élémens; équation d'une droite dans un plan.

4. SOIENT deux lignes AX, AY que, pour plus de facilité dans la construction, nous supposerons à angle droit, et considérons un point quelconque M dans l'angle YAX : Si de ce point on abaisse une perpendiculaire MP sur AX, on pourra passer du point A au point M, en parcourant sur la ligne AX la longueur AP, et s'élevant au-dessus de l'extrémité P à la hauteur PM. Fig. 7.

Un point sera donc complètement défini de position par les données AP, PM, dont la première est la distance MQ du point à la ligne AY, et l'autre la distance du même point à la ligne AX.

Les lignes fixes AX et AY auxquelles on rapporte ainsi les points par des distances MP, MQ, sont appelées *axes :* le point A est dit *origine*, parce que c'est de ce point que se comptent les distances AP, AQ.

Que a et b représentent ces distances : il faut dire que l'une doit être portée sur l'axe AX, l'autre sur AY, et à partir du point A. Nous noterons abréviativement par x la distance du point à l'axe AY, comptée sur AX, c'est-à-dire, AP, et par y la distance PM à l'axe AX, laquelle se retrouve en AQ sur AY.

Ainsi ces formules

$$x = a, \quad y = b,$$

énonceront que a et b sont des longueurs à porter de l'origine A, la première sur AX, et la seconde sur AY.

5. Mais le point peut être dans l'un des quatre angles droits formés autour de A; il faut donc rappeller le sens dans lequel chacune des longueurs a et b doit être portée. Si on est convenu de noter par

$$x = +a, \quad y = +b,$$

tout point M situé dans l'angle YAX, tout point M' le sera par

$$x = -a, \quad y = +b;$$

tout point M'', par

$$x = -a, \quad y = -b;$$

enfin tout point M''', par

$$x = +a, \quad y = -b.$$

Les signes de x seront ceux des cosinus, et les signes de y ceux des sinus des angles ayant le sommet en A, en convenant que de A vers X le cosinus sera positif, et qu'au-dessus de AX le sinus sera pareillement positif. (Alg. chap. XIII).

6. On énoncera que le point est sur l'axe AX, et on en définira la position sur cet axe, en écrivant

$$y = 0, \quad x = a:$$

pour un point de l'axe AY, on a

$$x = 0, \quad y = b;$$

enfin l'origine A est caractérisée par

$$x = 0, \quad y = b.$$

Il ne faut pas perdre de vue les significations des notations y et x, qui veulent dire : *distances aux axes* AX, AY.

Examinons, en particulier, la valeur de chacune de ces formules $x = a$, $y = b$.

La première caractérise tout point dont la distance à l'axe AY, est a : c'est donc la notation d'une parallèle à cet axe, menée à une distance $= a$: la seconde $y = b$ définit une parallèle à l'axe AX, menée à la distance $y = b$. Si ces deux formules existent ensemble, elles ne sont plus relatives qu'au seul point commun aux deux droites, et, en effet, nous savons déjà qu'il est indiqué par $x = a$, $y = b$.

L'axe AX, en totalité, est noté par

$$y = 0,$$

et tout l'axe AY par

$$x = 0.$$

7. Supposons maintenant que les axes AX, AY fassent entre eux un angle quelconque autre qu'un droit : alors les distances du point aux axes, mesurées sur des perpendiculaires, ne seront plus respectivement parallèles à ces axes; ensorte qu'on n'aura plus $Ap = Mq$, $Aq = Mp$. Mais qu'on mène par M une parallèle MP à AY, et par le même point une parallèle MQ à AX, et on formera le parallélogramme $APMQ$ dans lequel AP, MQ, ou AP, PM remplaceront les distances perpendiculaires employées dans le cas des axes rectangulaires; ces lignes seront les données de position du point, et on les notera toujours par Fig. 8.

$$x = a,\ y = b;$$

Mais ici, outre les longueurs a et b, et les signes qui en indiquent le sens, il faudra connaître l'inclinaison des axes. Il sera facile de voir que $x = a$ et $y = b$ définiraient un autre point pour un autre angle entre les axes.

8. Les lignes x et y sont encore nommées, la première, *abscisse*, et la seconde, *ordonnée :* prises ensemble, elles se nomment *coordonnées* du point qu'elles définissent : ces dénominations se rapportent également et aux axes rectangulaires et aux axes obliques.

9. On dit abréviativement : *le point* x, y, au lieu de, *le point dont les coordonnées sont* x, y.

Fig. 9. 10. On peut aussi définir le point M par la longueur AM et par l'angle φ qu'elle fait avec un axe AX : en désignant cette longueur par z et l'angle par φ, on aura

$$z = c, \quad \varphi = A^\circ,$$

A° étant le nombre de degrés, et parties de degrés contenus dans φ, et c la valeur linéaire de z. On n'a besoin, dans ce cas, que de l'axe fixe AX, et de l'origine A qui fait fonction de centre.

11. Une droite est donnée de position dans un plan, par les coordonnées de deux de ses points; elle l'est encore par celles d'un seul point, et par l'angle qu'elle fait avec l'un des axes. C'est ce dernier système de données qu'on emploie.

12. Si la droite passe par l'origine, sa position est fixée par la la seule donnée de l'angle qu'elle fait avec l'axe des abscisses. C'est le cas que nous supposerons d'abord, comme étant le plus simple, et nous nous proposerons d'assigner le rapport entre les coordonnées d'un point quelconque d'une telle droite.

Fig. 10. Considérons, en particulier, un point M' qui ait pour abscisse $AP' = x'$, $P'M' = y'$; ces coordonnées, ainsi que celles des autres points, faisant entre elles un angle $\mathcal{C}$ qui est celui des axes, on aura cette relation

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\mathcal{C} - \alpha)}.$$

Pour des points M'', M''' etc. dont les coordonnées seraient x'', y'' ; x''', y''', etc. on aurait pareillement

$$\frac{y''}{x''} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\mathcal{C} - \alpha)}, \quad \frac{y'''}{x'''} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\mathcal{C} - \alpha)}, \text{ etc.}$$

Le terme général de ces rapports constans dans toute l'éten-

due de la droite, sera

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\zeta - \alpha)} \ldots\ldots\ldots (1),$$

x, y désignant les coordonnées d'un point quelconque de AL : ainsi x devenant successivement x', x'' etc., y se change dans les ordonnées correspondantes y', y'' etc. La formule (1) est ce qu'on appelle *l'équation de la droite ;* c'est l'énonciation algébrique d'une propriété commune à tous ses points : nous l'écrirons ainsi :

$$y = \frac{\sin \alpha}{\sin (\zeta - \alpha)} x \ldots\ldots (2)$$

on se donnera l'abscisse x, et on en conclura l'ordonnée y.

L'angle α venant à varier, la ligne change de position en tournant autour du point A : ainsi à la même abcisse x, correspond une autre ordonnée y, ce qui arrive encore si ζ vient à varier ; mais ce qu'il est essentiel d'observer, c'est que, pour toutes les valeurs tant de α que de ζ, la relation (2) reste de même forme.

Qu'on veuille maintenant trouver la relation entre les coordonnées des points d'une droite telle que $R'L'$, située d'une manière quelconque : si on lui a mené par l'origine une parallèle AL, on observera que, pour la même abscisse x, chaque ordonnée de AL, par exemple, $P'M'$, sera augmentée de la même quantité $AR = b$; ainsi désignant $y + b$ par y, l'équation de $R'L'$ sera d'après (2), FIG. 10.

$$y = \frac{\sin \alpha}{\sin (\zeta - \alpha)} x + b \ldots\ldots (3).$$

Ici α et b sont les données de position de la droite $R'L'$; lorsque ces quantités sont connues, on peut la construire : mais si la droite est assujétie à quelques conditions particulières, comme de passer par un point, d'être ou parallèle ou perpendiculaire à une ligne donnée ; de passer

par deux points, etc., les quantités a et b sont des inconnues à déterminer, ainsi que nous le verrons bientôt.

13. Supposons les quantités α, ζ et b données, et qu'il s'agisse de construire la droite

$$y = \frac{\sin \alpha}{\sin (\zeta - \alpha)} x + b :$$

tout se réduit à connaître deux de ces points : nous chercherons ceux dans lesquels elle coupe les deux axes AX, AY ; l'intersection R étant le seul point de la droite pour lequel on ait $x = 0$, et R' le seul point de la même ligne pour lequel $y = 0$, nous supposerons successivement $x = 0$, $y = 0$, et nous trouverons

FIG. 11.

$$y = b = AR, \quad x = -\frac{\sin (\zeta - \alpha)}{\sin \alpha} b = AR' ;$$

portant donc à gauche de l'origine A, la longueur AR', si elle est négative, et sur AY la longueur AR supposée positive, la ligne menée par ces deux points, sera celle de l'équation.

Autre construction. Connaissant, par exemple, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $b = 3$, et l'angle ζ entre les axes AY et AX, on prendra d'abord $AR = 3$, puis ayant mené la parallèle RX' à AX, et porté $RP = 1 =$ rayon, on élèvera par P une perpendiculaire $PM = \frac{1}{3}$, ensorte qu'on aura encore deux points R, M de la droite.

Si pour une droite

$$y = x + 1,$$

qu'on suppose rapportée à des axes obliques faisant entre eux un angle de 50°, on veut trouver l'inclinaison α sur l'axe des x, il faut poser

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(50^g-\alpha)}=1,\ \text{d'où}\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha;$$

conséquemment

$$\text{tang}\,\alpha=\frac{1}{1+\sqrt{2}},$$

d'où on déduira la valeur angulaire de α.

14. Pour la même longueur b, et tous les angles possibles, depuis 0 jusqu'à 400^g, la ligne prend toutes les positions possibles autour du point R; pour chaque valeur angulaire α, prise avec toutes les ordonnées b tant positives que négatives, la ligne passe par tous les points de l'axe YY', sous toutes les inclinaisons. Il n'existe donc aucune ligne dans le plan des axes, dont l'équation ne soit comprise dans (3), en prenant b et α convenablement. Fig. 10.

On observera toujours que l'angle $\mathcal{C}$ n'influe pas sur la position de la ligne, et que les variations de cet angle, n'en produisent que dans l'inclinaison de l'ordonnée sur l'axe des abscisses, de manière que, pour une même abscisse, l'ordonnée correspond à un autre point de la droite.

15. On suppose ordinairement les axes rectangulaires, auquel cas

$$\sin\mathcal{C}=\sin 100^g=1,\ \text{d'où}\ \sin(\mathcal{C}-\alpha)=\cos\alpha;$$

l'équation (3) se change alors dans celle-ci,

$$y=x\,\text{tang}\,\alpha+b=ax+b\ldots\ldots(4)$$

a représentant tang α.

On construit cette équation, ainsi que nous l'avons dit précédemment, en cherchant les intersections de la ligne avec chacun des angles rectangulaires; mais si la droite passe par l'origine, auquel cas l'équation devient

$$y=ax,$$

Fig. 12. on prend $AP = 1 =$ rayon, puis on porte sur une perpendiculaire élevée par P, une longueur a prise sur une échelle de parties égales, et l'extrémité M est un autre point de la droite.

On est maintenant en état de construire les équations

$$y = x + 1,\ y = -x - 1 :$$

ces deux lignes coupent l'axe AX au même point; elles sont situées symétriquement par rapport à cet axe, c'est-à-dire, l'une au-dessus, l'autre au-dessous, sous des angles égaux, et, de plus, elles sont perpendiculaires l'une à l'autre.

Les deux droites

$$y = -x - 1,\ y = -x + 1$$

sont parallèles, ce qu'on aperçoit indépendamment de la construction, en observant qu'elles font avec l'axe des x, des angles égaux, puisqu'ils ont même tangente trigonométrique -1.

La droite exprimée par

$$y = x\sqrt{-1} - 1$$

se réduit à un point situé sur l'axe des y, au-dessous de celui des x, à une distance égale à l'unité; car, pour toute abscisse autre que zéro, l'ordonnée y est imaginaire.

16. Les questions qu'on peut se proposer sur la ligne droite, se réduisent, ainsi que nous l'avons déja dit (12), à déterminer les inconnues a et b, de manière que la droite

$$y = ax + b \ldots\ldots (1)$$

ait la position requise.

1°. *Assujétir une droite à passer par deux points donnés.*

Les données de position de ces points, seront x', y' pour l'un, x'', y'' pour l'autre; il faut écrire que chacun de ces points se

trouve sur la droite ; c'est ce qu'on exprimera en disant 1°. que lorsque l'abscisse générale x devient x', l'ordonnée y devient y' ; 2°. que pour $x = x''$, y se change en y''. On a donc les deux équations de condition

$$(2) \ldots\ldots y' = ax' + b,\ y'' = ax'' + b \ldots\ldots (3) :$$

dont la différence donne

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{y' - y''}{x' - x''},$$

et par la substitution de cette valeur de a, dans l'une des précédentes, on trouve

$$b = \frac{y'x'' - y''x'}{x'' - x'}.$$

Mais il est plus expéditif de retrancher (2) de (1), ce qui donne

$$y - y' = a(x - x'),$$

et de substituer dans cette différence la valeur de a trouvée plus haut. L'équation de la droite cherchée est donc

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x') \ldots\ldots (4).$$

L'élimination de b équivaut à sa détermination, ainsi qu'on peut s'en assurer, en portant les valeurs ci-dessus de a et b dans (1).

Il ne sera pas inutile de résoudre la même question par la géométrie. On a

$AP' = x'$, $P'M' = y'$; $AP'' = x''$, $P''M'' = y''$; $AP = x$, $PM = y$; Fig. 13.

les triangles semblables $M'mM$, $M'm''M''$ donnent

$$Mm = \frac{M''m''}{M'm''}M'm, \text{ d'où } PM - P'M' = \frac{P''M'' - P'M'}{AP'' - AP'}(AP - AP')$$

et remplaçant ces lignes par les notations algébriques, on retrouve

$$y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x').$$

Dans le triangle $M''M'm''$, la tangente trigonométrique de l'angle $M''M'm''$, est

$$a=\frac{M''m''}{M'm''}=\frac{M''P''-M'P'}{AP''-AP'}=\frac{y''-y'}{x''-x'}.$$

on a encore

$$AR=b=P'M'-M'm'=P'M'-a\times Rm'=y'-\frac{y''-y'}{x''-x'}x',$$

c'est-à-dire, la valeur de b trouvée plus haut.

Il convient encore de discuter l'équation (4), c'est-à-dire, de reconnaître si elle rend toutes les conséquences des hypothèses qu'on peut faire sur les données x', y'; x'', y''; cet examen servira d'ailleurs de vérification. A cet effet, reprenons l'équation

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x'):$$

lorsque l'abscisse générale x devient x', le second membre devient nul, et on en déduit

$$y-y'=o, \text{ d'où } y=y',$$

ce qui doit arriver. Mais on a aussi cette équation

$$y-y''=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x'')$$

qui pour $x=x''$, donne $y=y''$. Si l'on suppose $y'=y''$,

on trouve

$$y = y', \text{ ou } y = y'',$$

ce qui veut dire que l'ordonnée générale est constante, ou que la droite est parallèle à AX, conclusion qu'on tire encore de

$$a = \frac{y' - y''}{x' - x''} = o,$$

Pour $x' = x''$, l'expression de a devient

$$a = \frac{y' - y''}{o} \infty;$$

donc alors l'angle de la ligne avec l'axe AX est droit; elle est donc perpendiculaire à cet axe, position conforme à l'hypothèse. Enfin aux hypothèses $x = x''$ et $y = y''$, correspond

$$a = \frac{o}{o};$$

donc la ligne est d'une position absolument arbitraire, et en effet on n'a donné qu'un point pour la fixer : la même indétermination a lieu à l'égard de b, et par là on est averti qu'elle peut couper l'axe AY dans tous ses points.

Si l'on fait $y = o$ pour avoir l'abscisse du point dans lequel la droite rencontre l'axe AX, on trouve que cette abscisse est

$$x = x' - \frac{x' - x''}{y' - y''} y' = \frac{-y''x' + x''y'}{y' - y''}.$$

et ou peut rechercher ce qu'elle devient dans les hypothèses précédentes.

2° *Trouver la distance entre deux points donnés dans un plan.*

La distance $M'M''$ est l'hypoténuse du triangle rectangle Fig. 13.

$M'M''m''$, et si on la désigne par D, on a

$$D = \sqrt{\overline{M''m''}^2 + \overline{M'm''}^2} = \sqrt{(y'' - y')^2 + (x'' - x')^2}$$

Si le point M' est à l'origine même, les coordonnées x', y' deviennent nulles, et l'expression précédente se réduit à

$$D = \sqrt{y''^2 + x''^2} = x'' \sqrt{1 + a^2}$$

parce qu'alors l'équation de la droite est

$$y = ax,$$

et que devant avoir lieu pour $x = x''$, $y = y''$, elle donne

$$y'' = ax''.$$

3°. *Assujétir une droite à passer par un point donné, et à être parallèle à une ligne donnée de position.*

Ces deux conditions suffisent pour déterminer les deux élémens de position de la droite demandée. Soit l'équation de la droite donnée

$$y = ax + b \ldots\ldots (1),$$

et celle de la droite cherchée

$$y = a'x + b' \ldots\ldots (2):$$

les quantités a et b sont données, et a' et b' sont les inconnues. Désignons par x', y' les coordonnées du point donné : puisqu'il doit être sur la seconde droite, on aura la condition

$$y' = a'x' + b' \ldots\ldots (3);$$

retranchant (3) de (1), il viendra

$$y - y' = a'(x - x') \ldots\ldots (4),$$

résultat qu'on aurait obtenu en prenant une valeur de b' dans

(3), et la substituant dans (2). D'ailleurs les deux droites devant être parallèles, les tangentes trigonométriques a et a' sont les mêmes : introduisant cette seconde condition dans (4), l'équation de la droite cherchée sera

$$y - y' = a(x - x') \ldots\ldots (5).$$

Si l'on veut dire que le point donné est sur la droite connue, il faut écrire que y' est la valeur de y qui correspond à $x = x'$, auquel cas (1) devient

$$y' = ax' + b;$$

substituant cette valeur de y' dans (5), on trouve après les réductions

$$y = ax + b;$$

donc la seconde droite se confond avec la première, ce qu'on savait d'avance.

4°. Trouver l'angle de deux droites données de position dans un plan.

Les données de la question sont les angles CAX, CBX que fait chacune des droites avec l'axe AX, et il s'agit de trouver l'angle ACB. Or en posant $CAX = \alpha$, $CBX = \alpha'$, $ACB = V$, tang $\alpha = a$, tang $\alpha' = a'$, on a

Fig. 14.

$$\alpha' = \alpha + V, \text{ d'où } \text{tang } V = \text{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{a' - a}{1 + aa'};$$

si les droites sont parallèles, tang $V = 0$, et on trouve

$$a' = a,$$

résultat connu. Si les droites sont perpendiculaires l'une à l'autre, tang $V = \infty$, ou $\frac{1}{\text{tang } V} = 0$; donc

$$1 + aa' = 0;$$

telle est donc la relation qui existe entre les coefficiens de x dans les équations

$$y = ax + b,\ y = a'x + b',$$

lorsque les droites qu'elles représentent, sont orthogonales.

Réciproquement, dans le cas de cette relation, les lignes sont à angle droit. En effet, on en déduit

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha' = 0;$$

conséquemment

$$\cos(\alpha' - \alpha) = 0:$$

donc l'angle $\alpha' - \alpha = V = 100^{\circ}$.

5°. *Assujétir une droite à passer par un point donné, et à rencontrer une droite donnée de position sous un angle déterminé.*

L'équation de la droite donnée est

$$y = ax + b.....(1),$$

celle de la droite cherchée,

$$y = a'x + b'.....(2);$$

on connaît a et b, et il faut évaluer a' et b' d'après les deux conditions de l'énoncé. Or, en tant que la droite cherchée doit passer par un point dont les coordonnées sont x', y', son équation doit avoir lieu pour $x = x'$, $y = y'$; on a donc aussi

$$y' = a'x' + b'.....(3),$$

et conséquemment

$$y - y' = a'(x - x').....(4):$$

nous avons donc déterminé b' d'après l'une des deux condi-

tions : reste à évaluer a' de manière à satisfaire à l'autre. Or, m étant la tangente trigonométrique de l'angle entre les deux droites, on a (probl. 4°)

$$m = \frac{a' - a}{1 + aa'}; \text{ d'où } a' = \frac{a + m}{1 - ma};$$

reportant cette valeur pour a' dans (4), on introduira la seconde condition, et la droite cherchée aura pour équation

$$y - y' = \frac{a + m}{1 - ma}(x - x') \quad (5).$$

On peut obtenir la portion de cette droite, comprise entre le point x', y' et la droite donnée : pour cela, il faut connaître les coordonnées de l'intersection des deux droites, coordonnées qui ne peuvent être que valeurs de x et y, qui satisfont en même temps aux deux équations (1) et (5) : mais comme la formule de la distance de deux points, est donnée au moyen des différences $x'' - x'$, $y'' - y'$ (probl. 2°), nous préparerons ainsi les équations (1) et (5) :

$$y'' - y' = a(x'' - x') - y' + ax' + b,$$

$$y'' - y' = \frac{a + m}{1 - ma}(x'' - x');$$

y'', x'' étant les coordonnées de l'intersection des deux droites; on déduit de là

$$y'' - y' = -\frac{a + m}{m(a^2 + 1)}(y' - ax' - b),$$

$$x'' - x' = -\frac{1 - ma}{m(a^2 + 1)}(y' - ax' - b),$$

Subsituant ces valeurs dans la formule de la distance,

$$D = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2},$$

on trouve

$$D = \frac{y' - ax' - b}{m}\sqrt{\frac{1+m^2}{1+a^2}}.$$

Lorsque le point x', y' est sur la droite donnée, l'équation (1) étant satisfaite par x', y', donne

$$y' = ax' + b, \quad \text{d'où} \quad y' - ax' - b = 0;$$

et d'après cela, $D = 0$, ce qui doit être, puisqu'alors la distance est nulle.

Si la droite cherchée doit être perpendiculaire à l'autre, alors $m = \infty$, $1 + m^2$ devient m^2, et l'expression ci-dessus, qui est alors celle de la plus courte distance d'un point à une droite, devient

Fig. 15.

$$D = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1+a^2}} = M'P'.$$

Si la droite doit faire avec celle qui est donnée, un angle de 50°, alors $m = 1$, et on trouve

$$D' = \frac{(y' - ax' - b)\sqrt{2}}{\sqrt{1+a^2}} = M'P;$$

le rapport de $M'P$ à $M'P'$, ou celui de la diagonale au côté du carré, est

$$\frac{M'P}{M'P'} = \sqrt{2}.$$

Que maintenant la droite donnée soit perpendiculaire sur AX, on mettra la plus courte distance sous la forme

$$D = \frac{\frac{y'}{a} - x' - \frac{b}{a}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}} = \frac{\frac{y'}{a} - x' + AR'}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}} = AR' - x',$$

pour $a = \infty$. Lorsque $a = 0$, on a $b = 0$, et $D = y'$.

6°. *Assigner la condition sous laquelle trois lignes menées de chacun des sommets d'un triangle, se couperaient en un seul point.*

Soient x', y'; x'', y''; x''', y''' les coordonnées des sommets D, B, C: les trois droites menées par ces sommets auront pour équations Fig. 16.

$$y-y'=a'(x-x'); \quad y-y''=a''(x-x''); \quad y-y'''=a'''(x-x'''); \quad$$

a', a'', a''' étant les tangentes trigonométriques des angles qu'elles font avec l'axe AX. Pour dire que ces trois droites se rencontrent, il faut supposer que les trois équations sont satisfaites par un même système de valeurs x, y; ce qui revient à évaluer x et y au moyen de deux quelconques d'entre elles, et à égaler à zéro le résultat de leur substitution dans la troisième. On trouve ainsi l'équation de condition,

$$\begin{aligned} a'(y''-y''')+a''(y'''-y')+a'''(y'-y'')+a'a''(x'-x'')=0 \ldots (1) \\ +a''a'''(x''-x''') \\ +a'''a'(x'''-x'). \end{aligned}$$

Supposons les droites en question perpendiculaires aux côtés du triangle, et voyons si, pour un tel système, la condition (1) est satisfaite.

L'équation de BC est

$$y-y''=\frac{y''-y'''}{x''-x'''}(x-x''),$$

et celle de la droite menée par D,

$$y-y'=a'(x-x');$$

or cette dernière droite devant être perpendiculaire à l'autre, il doit exister entre les tangentes trigonométriques, la relation

$$aa'+1=0, \quad \text{d'où} \quad a'=-\frac{1}{a};$$

mais ici,

$$a=\frac{y''-y'''}{x''-x'''},\ \text{donc}\ a'=-\frac{x''-x'''}{y''-y'''}.$$

On déduirait de la condition de perpendicularité de DC et de la droite menée par B, qui ont pour équations

$$y-y'=\frac{y'-y'''}{x'-x'''}(x-x'),\ y-y''=a''(x-x'');$$

de DB et de la droite menée par C, qui sont représentées par

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x'),\ y-y'''=a'''(x-x'''),$$

ces valeurs de a'', a''',

$$a''=-\frac{x'''-x'}{y'''-y'};\ a'''=-\frac{x'-x''}{y'-y''};$$

de là

$$\left.\begin{aligned} a'a''(x'-x'')&=\frac{(x'-x'')(x''-x''')(x'''-x')}{(y'-y'')(y''-y''')(y'''-y')}(y'-y'')\\ a''a'''(x''-x''')&=\frac{N}{D}(y''-y''')\\ a'''a'(x'''-x')&=\frac{N}{D}(y'''-y') \end{aligned}\right\}\ \ldots(2).$$

N et D désignant le numérateur et le dénominateur de la fraction qui multiplie $y'-y''$. Par toutes ces valeurs substituées, l'équation de condition est satisfaite, puisqu'elle devient

$$-(x''-x'''+x'''-x'+x'-x'')+\frac{N}{D}(y'-y''+y''-y'''+y'''-y')=0.$$

Fig 17. Si l'on place le côté BC sur l'axe des abscisses, ce qui n'altère pas la généralité des résultats, et de plus le point B à

l'origine A, alors

$$y''=0,\ x''=0,\ y''=0,$$

et l'équation de condition se simplifie et devient

$$-a''y'+a''y'+a'a''x'-a''a''x''+a''a'(x''-x')=0 \ldots\ldots (3)$$

dans cette position du triangle,

$$a'=-\frac{x''-x''}{y''-y''}=\infty;$$

et en effet la ligne DR prolongée est perpendiculaire sur AX. Si l'on supprime dans (3) les termes qui ne renferment pas a', pour dire que cette tangente est infinie, la condition (3) sera simplifiée et exprimée ainsi qu'il suit,

$$a'a''x'+a''a'(x''-x')=0,$$

et divisant par a'

$$a''x'+a''(x''-x')=0:$$

mais dans cette position du triangle, on a

$$a''=\frac{x''-x'}{y'};\ a''=-\frac{x'}{y'},$$

et par ces valeurs la relation précédente est satisfaite.

Que des points A et C, on mène des lignes aux milieux des côtés opposés, les tangentes trigonométriques seront

$$a''=\frac{y'}{x''+x'},\ a''=\frac{y'}{x'-2x''};$$

la substitution de ces valeurs dans (3) donnera, après la

division par y',

$$a'\left\{\frac{x'}{x''+x'}+\frac{x''-x'}{x'-2x''}\right\}$$
$$=\frac{y'}{x''+x'}-\frac{y'}{x'-2x''}+\frac{y'x''}{(x''+x')(x'-2x'')};$$

de laquelle on déduit

$$a'=\frac{-2y'}{x''-2x'},$$

et comme on trouve que telle est la valeur de a', c'est-à-dire, de la tangente trigonométrique de l'angle que fait la droite DM avec AX, on peut conclure que cette troisième droite passe par le concours des deux premiers.

Considérons les perpendiculaires élevées sur les milieux des
Fig. 18. côtés du triangle ADC. L'équation de AD est

$$y=\frac{y'}{x'}x;$$

celle de DC,

$$y-y'=\frac{y'}{x'-x''}(x-x');$$

celle de AC,

$$y=0:$$

celles des perpendiculaires sur ces côtés, sont

$$y-\tfrac{1}{2}y'=-\frac{x'}{y'}(x-\tfrac{1}{2}x')$$
$$y-\tfrac{1}{2}y'=-\frac{x'-x''}{y'}\left(x-\frac{x'+x''}{2}\right)$$
$$x=\frac{x''}{2}.$$

On formera immédiatement l'équation de condition en déterminant x d'après les deux premières équations, et portant

cette valeur dans la troisième qui doit être satisfaite par cette substitution, s'il y a un point de concours : or on trouve $x = \frac{x''}{2}$; donc ces trois lignes se coupent encore en un point.

7°. *Proposons-nous de trouver le point de concours, s'il en existe un, de trois droites qui divisent également les trois angles d'un triangle.*

D'abord nous rechercherons l'équation d'une droite qui diviserait également l'angle de deux droites données, et pour simplifier les équations, on supposera les droites données ramenées à l'origine parallèlement, à leurs positions primitives, et on aura pour équation de AB, Fig. 19.

$$y = ax,$$

pour équation de AC,

$$y = a'x$$

et pour équation de la droite cherchée AM,

$$y = Ax;$$

a et a' sont des tangentes données, et il faut déterminer A, c'est-à-dire, la tangente de l'angle MAX, d'après la condition que AM divise également l'angle BAC. Or AM fait avec AB un angle dont la tangente est

$$\frac{a - A}{1 + aA};$$

et l'angle de AM avec AC, a pour tangente

$$\frac{A - a'}{1 + a'A};$$

on a donc la condition

$$\frac{A - a'}{1 + a'A} = \frac{a - A}{1 + aA};$$

d'où résulte pour la détermination de A, cette équation du second degré,

$$A^2 - 2\frac{aa' - 1}{a + a'} A - 1 = 0,$$

qui donne les deux racines

$$A' = \frac{aa' - 1 + \sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}}{a + a'}$$

$$A'' = \frac{aa' - 1 - \sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}}{a + a'}.$$

On peut supposer, sans altérer la généralité de la solution, que AC se confonde avec AX, auquel cas, $a' = 0$, et les racines précédentes deviennent

$$A' = \frac{-1 + \sqrt{1 + a^2}}{a}, \quad A'' = \frac{-1 - \sqrt{1 + a^2}}{a};$$

comme la relation

$$A'A'' + 1 = 0$$

est satisfaite, il faut conclure qu'il existe deux lignes AM qui résolvent la question, et qui sont à angle droit; l'une divise l'angle donné et l'autre son supplément : en effet, la division en deux parties égales de l'un de ces angles, emporte celle de l'autre.

La tangente

$$A' = \frac{-1 + \sqrt{1 + a^2}}{a}$$

étant positive, est celle de l'angle $MAC = \frac{1}{2}BAC$.

Nous allons maintenant résoudre la même question à l'égard
Fig. 20 de l'angle B, et à cet effet, nous imaginerons par A une parallèle AC' à CB, ensorte que la ligne AM' qui divisera

l'angle $C'AB$ également, sera parallèle à la ligne BM qui diviserait ABC suivant la même condition, et conséquemment l'angle $M'AC$ sera égal à DBC. Or l'équation de AB est

$$y = ax,$$

celle de AC',

$$y = \alpha x;$$

enfin celle de AM'

$$y = Bx;$$

ces équations étant les mêmes que celles qui ont été employées précédemment, sauf le changement de a' en α, et de A en B, on aura ces deux valeurs de B,

$$B' = \frac{a\alpha - 1 + \sqrt{(1+a^2)(1+\alpha^2)}}{a+\alpha}$$

$$B'' = \frac{a\alpha - 1 - \sqrt{(1+a^2)(1+\alpha^2)}}{a+\alpha}.$$

La division de l'angle BCA suivant le même rapport, est ramenée à celle de l'angle $C'AX'$: or l'équation de AX' est

$$y = 0,$$

celle de AC'

$$y = \alpha x;$$

enfin celle de AM'',

$$y = Cx;$$

donc on aura ces deux valeurs de C,

$$C' = \frac{-1-\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}; \quad C'' = \frac{-1+\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}.$$

On dira que le triangle ABC est isoscèle, en écrivant $\alpha = -a$, et dans ce cas, $B' = \infty$, d'où l'on conclut que la ligne BD qui divise également l'angle ABC, est perpendiculaire sur AC.

L'équation de AM est donc

$$y = A'x,$$

celle de BM,

$$y - y' = B'(x - x'),$$

enfin celle de CM,

$$y = C'(x - x'').$$

x', y' étant les coordonnées du point B, et x'' l'abscisse du point C,

Pour reconnaître si ces droites se coupent en un point unique, recherchons les coordonnées du point de rencontre de AM et CM : elles sont

$$x = \frac{C'x''}{C' - A'}, \quad y = \frac{A'C'x''}{C' - A'};$$

la droite menée par B et par M aura donc pour équation

$$y - y' = \frac{y'(C' - A') - A'C'x''}{x'(C' - A') - C'x''}(x - x');$$

conséquemment, la condition sous laquelle les trois droites se coupent, est exprimée par

$$B' = \frac{y'(C' - A') - A'C'x''}{x'(C' - A') - C'x''}.$$

Lorsque le triangle est isoscèle, $A' = -C'$, et on sait que $B' = \infty$; or son expression devient

$$\frac{-2y' + A'x''}{-2x' + x''} = \infty,$$

à cause de $x'' = 2x'$.

Pour reconnaître en général si l'identité précédente a lieu,

on éliminera du second membre y' et x'', d'après les relations

$$a = \frac{y'}{x'}; \quad \alpha = -\frac{y'}{x'' - x'};$$

d'où on déduit

$$y' = ax'; \quad x'' = \frac{(\alpha - a)x'}{\alpha};$$

La substitution de ces valeurs donne

$$\frac{y'(C' - A') - A'C'x''}{x'(C' - A') - C'x''} = \frac{a\alpha(C' - A') - A'C'(\alpha - a)}{aC' - \alpha A'};$$

or comme $A' = -\frac{1}{A''}$, $C' = -\frac{1}{C''}$, $B' = -\frac{1}{B''}$, les valeurs de A', C' et B' peuvent être traduites ainsi :

$$A' = \frac{a}{1 + \sqrt{1 + a^2}}; \quad C' = \frac{\alpha}{1 - \sqrt{1 + \alpha^2}};$$

$$B' = \frac{\alpha\sqrt{1 + a^2} + a\sqrt{1 + \alpha^2}}{\sqrt{1 + a^2} + \sqrt{1 + \alpha^2}};$$

des deux premières on déduit

$$\sqrt{1 + a^2} = \frac{a - A'}{A'}; \quad \sqrt{1 + \alpha^2} = \frac{C' - \alpha}{C'};$$

ces valeurs portées dans B' en place des radicaux, transforment B' en $\frac{a\alpha(C - A') - A'C'(\alpha - a)}{aC' - \alpha A'}$. Donc aussi ces trois droites concourent en un point.

8°. Il est maintenant facile de s'assurer que *la droite menée par les points de concours des perpendiculaires abaissées des sommets et des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés, va passer par le point de concours des lignes qui joignent les sommets et les milieux des côtés.*

En effet, les perpendiculaires menées par A et D aux

côtés DC et AC, ont pour équations (Probl. 6°),

$$y = \frac{x''' - x'}{y'} x \; ; \; x = x' ;$$

les coordonnées du point de concours, sont

$$x = x' , \; y = \frac{x''' - x'}{y'} x' .$$

Les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés AD, AC sont (Probl. 6°, fig. 18.) représentées par

$$y - \frac{y'}{2} = -\frac{x'}{y'}\left(x - \frac{x'}{2}\right) ; \; x = \frac{x'''}{2} ;$$

les coordonnées du point de concours sont

$$x = \frac{x'''}{2} , \; y = \frac{y'}{2} - \frac{x'}{y'}\left(\frac{x''' - x'}{2}\right).$$

L'équation d'une droite assujétie à passer par ces deux points, sera donc

$$y'y - (x''' - x')\, x' = \frac{3(x''' - x')\, x' - y'^2}{2x' - x'''} (x - x') \ldots . (1) ;$$

Tout se réduit donc à reconnaître si les coordonnées du point de concours de deux des trois lignes qui joignent les sommets avec les milieux des côtés opposés, satisfont à cette équation : or l'équation de la ligne menée de A au milieu de BC, est (Probl. 7°)

$$y = \frac{y'}{x''' + x'} x ;$$

celle de la ligne menée de C au milieu de AB, est

$$y - \frac{y'}{2} = \frac{y'}{x' - 2x'''}\left(x - \frac{x'}{2}\right).$$

Les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites, sont,

$$x = \frac{x'' + x'}{3}, \quad y = \frac{y'}{3};$$

la substitution de ces coordonnées en place de x et y dans (1), réduit cette équation à zéro : donc les trois points en question sont sur une même droite.

Des quatre points d'intersection trouvés ci-dessus, les trois que nous venons de considérer, sont les seuls en ligne droite, ainsi qu'on pourrait s'en assurer par une analyse semblable à la précédente, appliquée à toutes les combinaisons possibles de trois de ces quatre points.

9°. *La plus courte ligne que l'on puisse mener d'un point pris dans un angle entre les côtés, est la perpendiculaire à la ligne qui divise l'angle également.*

Soit prise pour axe des abscisses la ligne qui divise l'angle DAD' en deux parties égales, et soit M' le point donné : il s'agit de faire voir que la plus courte des lignes qui passent par M', est la perpendiculaire $RM'R'$ à AX, et, pour cela, nous chercherons la plus petite transversale qu'on puisse mener par M'. Fig. 21.

Les coordonnées du point M' étant y', x', l'équation de LL' sera

$$y - y' = a'(x - x') \ldots\ldots (1),$$

a' étant la tangente de l'angle LIX; celles des droites AD, AD' sont

$$(2) \ldots\ldots y = ax, \quad y = -ax \ldots\ldots (3).$$

Des points L et L' abaissant les perpendiculaires Lp, $L'p'$ sur AX, on aura

$$Ip = Ap - AI;$$

Ap est l'abscisse d'intersection des droites LL', AD, et on la

trouve en écrivant dans (1), pour y, sa valeur ax donnée par (2), ensorte que

$$Ap = \frac{y' - a'x'}{a - a'}.$$

Pour avoir AI, on fera dans (1) $y = 0$; d'où l'on déduit

$$AI = \frac{a'x' - y'}{a'};$$

de là résulte

$$Ap - AI = Ip = \frac{a(y' - a'x')}{a'(a - a')}.$$

L'ordonnée pL est donnée par $y = a.Ap$: on a donc

$$pL = \frac{a(y' - a'x')}{a - a'};$$

on trouve de la même manière

$$Ap' = \frac{a'x' - y'}{a' + a};\ AI = \frac{a'x' - y'}{a'};$$

d'où

$$AI - Ap' = Ip' = \frac{a(-y' + a'x')}{a'(a + a')};$$

et parce que $P'L' = -a.Ap'$, on a

$$p'L' = -\frac{a(-y' + a'x')}{a' + a}.$$

D'après cela,

$$\overline{IL}^2 = \overline{Ip}^2 + \overline{pL}^2 = \frac{a^2(1 + a'^2)}{a'^2(a' - a)^2}(y' - a'x')^2$$

$$\overline{IL'}^2 = \overline{Ip'}^2 + \overline{p'L'}^2 = \frac{a^2(1 + a'^2)}{a'^2(a' + a)^2}(-y' + a'x')^2;$$

donc

$$IL + IL' = LL' = \frac{2a(a'x' - y')\sqrt{1 + a'^2}}{a'^2 - a^2}.$$

Pour faciliter la conclusion, nous pouvons supposer le poi-

M' sur l'axe AX, auquel cas $y' = 0$, et

$$LL' = \frac{2ax'}{\sin\alpha'\left(1 - \frac{a^2}{a'^2}\right)},$$

en observant que $\sqrt{1+a'^2}$ est la sécante, ou l'unité divisée par le cosinus de l'angle $LIX = \alpha'$. Or le *minimum* d'une fraction correspond à la plus grande valeur du dénominateur, en observant qu'ici le numérateur est composé de quantités qui ne varient pas, lorsque LL' varie de position : on obtient donc ce *minimum* par l'hypothèse $\alpha' = 100^\circ$, qui donne $a' = \infty$, $\sin\alpha' = 1$, $\frac{a}{a'} = 0$: alors l'expression précédente se réduit à $2ax'$, qui est celle de la perpendiculaire RR' passant par le point M'.

Si dans l'expression

$$LL' = \frac{2a(a'x' - y')\sqrt{1+a'^2}}{a'^2 - a^2}$$

on fait $y' = ax'$, ce qui revient à supposer que les points M', L et R coincident en un seul point L, on trouvera Fig. 22.

$$LL' = \frac{2a(a'-a)x'\sqrt{1+a'^2}}{a'^2-a^2} = \frac{2ax'\sqrt{1+a'^2}}{a'+a}.$$

Mais si de plus on établit entre les tangentes trigonométriques a et a' la relation

$$-aa' + 1 = 0, \text{ d'où } a' = +\frac{1}{a},$$

pour exprimer que LL' est perpendiculaire sur AD', on aura

$$LL' = \frac{2ax'}{\sqrt{1+a^2}} < 2ax',$$

Donc de deux lignes LL', LR' menées d'un point à une ligne, la perpendiculaire est la plus courte.

CHAPITRE III.

Élémens de position d'un point dans l'espace : notation algébrique de ces élémens. Équation de la ligne droite dans l'espace.

Fig. 23. 17. SOIENT trois lignes fixes ou axes AX, AY, AZ réciproquement perpendiculaires l'un à l'autre au point A; chacun d'eux sera perpendiculaire au plan des deux autres, puisqu'il l'est à deux droites qui se coupent à son pié dans ce plan : ainsi chacun de ces plans sera en même temps perpendiculaire aux deux autres. Ces trois plans forment donc les trois faces d'un parallélépipède rectangle, et l'angle solide trièdre A. Nous supposeróns les plans ZAX et ZAY verticaux, et le plan YAX horizontal.

Qu'on se représente un point M dans l'espace, ou situé hors des plans ZAX, ZAY, YAX en position vraie, par exemple, en avant du premier plan, à droite du second et au-dessus du troisième, et qu'on imagine de M des perpendiculaires MM', MM'', MM''' sur ces trois plans : ces perpendiculaires mesureront les plus courtes distances du point de l'espace à chacun de ces plans. Les plans menés par les perpendiculaires MM' et MM'', MM' et MM''', MM'' et MM''' fermeront le parallélépipède; et le point de l'espace sera le sommet de l'angle solide trièdre M opposé à l'angle A.

La distance MM' du point de l'espace, M, au plan ZAX, est en longueur vraie ou $M''m'$ ou Am''; celle MM'' du même point au plan ZAY est $M'''m''$ ou Am : enfin celle de ce point

au plan horizontal YAX est MM'' ou $M'm$ ou Am'. Ainsi ces distances se retrouvent sur les lignes fixes AY, AX, AZ.

Les points M', M'', M''', piés des perpendiculaires abaissées du point M sur les plans auxquels on rapporte la position de ce point, sont dits *projections verticale et horizontale* du point M, *verticales*, lorsqu'il s'agit de M' et M'', *horisontale* lorsqu'il s'agit de M'''.

Deux de ces projections suffisent pour retrouver le point. En effet, les perpendiculaires menées par chacune d'elles au plan qui la contient, se coupent dans le point de l'espace.

La troisième projection résulte évidemment de chacune des deux autres, ainsi que le montre la figure.

18. Puisque la position d'un point est complètement définie par ses distances aux trois plans rectangulaires de projection, si on note par x la distance du point au plan YAZ, par y celle du même point au plan ZAX, et enfin par z sa distance au plan YAX, et que a, b, c soient les valeurs linéaires de ces distances, cette position sera bien indiquée par

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

Le système des formules

$$x = a, \quad z = c,$$

note la position de la projection M'; celui des formules

$$y = b, \quad z = c,$$

note la projection M'', et ces deux projections suffisent, comme nous l'avons vu, pour retrouver la position du point; aussi ces deux systèmes de formules comprennent-ils les données des trois distances.

Lorsque le point est dans le plan horizontal,

$$z = 0,$$

et d'ailleurs sa position dans ce plan, est fixée par

$$x = a, \quad y = b;$$

lorsqu'il est dans le plan ZAX,

$$y = 0,$$

et sa position est fixée par

$$x = a, \quad z = c;$$

enfin, s'il est dans le plan ZAY, on a

$$x = 0,$$

et il est défini dans ce plan par

$$y = b, \quad z = c.$$

Pour un point situé sur l'axe AX, on a

$$z = 0, \quad y = 0, \quad x = a,$$

pour un point situé sur l'axe AY,

$$z = 0, \quad x = 0, \quad y = b,$$

et enfin, pour un point de l'axe AZ,

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = c.$$

Pour l'origine A des distances, on a

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Tout point du plan $MM'mM''$, et conséquemment ce plan lui-même est noté par

$$x = a,$$

puisque a est la distance commune de chacun de ses points au plan YAZ. Le plan $MM''m''M''$ est noté par

$$y = b,$$

et enfin le plan $MM'm'M''$ est caractérisé par

$$z = c.$$

La position de ces trois plans donne celle du point M, et conséquemment ce point sera défini, ainsi que nous l'avons déjà dit, par le système des formules

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

19. Considérons maintenant une ligne droite AB située d'une manière quelconque dans l'espace, et un plan KL qui soit celui de la planche; si de tous les points M, m, n, etc. N, de cette droite, on conçoit des perpendiculaires sur KL, tous les piés M', m', n', ... N' seront dans une ligne droite indéfinie ab, qu'on nomme *projection de la droite.* Fig. 24.

MN étant une portion de AB, $M'N'$ sera projection de MN: si le plan KL est horizontal, $M'N'$ est dite *projection horisontale.*

Mais on observera que les projections M' et N' des extrémités M et N suffisent, puisqu'en les joignant, on a la projection de la totalité de la ligne.

Le plan $MNN'M'$ s'appelle *plan projetant*, et KL se nomme *plan de projection.* Le plan projetant d'une droite est donc celui qui, passant par cette droite, est perpendiculaire au plan de projection; ensorte que l'intersection de ces deux plans est la projection de la droite.

$M'N'$ est la projection horizontale commune de toute droite située d'une manière quelconque dans le plan projetant $MNN'M'$, et comprise entre les perpendiculaires extrêmes MM', NN'. On ne peut donc conclure une ligne de l'espace de la donnée d'une seule projection.

Supposons toujours le plan horizontal KL, et un plan PQ qui lui soit perpendiculaire, puis la ligne MN dans l'espace au-dessus de KL et à droite de PQ; MM'', NN'' étant perpendi- Fig. 25.

culaires à KL, $M''N''$ sera *la projection horizontale* de MN: de même les lignes MM', NN' étant perpendiculaires à PQ, $M'N'$ sera dite *projection verticale* de MN.

Maintenant si par $M''N''$, on mène un plan perpendiculaire à KL, et par $M'N'$ un plan perpendiculaire à PQ, l'intersection de ces deux plans *projetans*, sera la ligne MN de l'espace. Les données de deux projections d'une ligne sur deux plans réciproquement perpendiculaires, suffisent donc pour isoler la ligne, c'est-à-dire, pour la caractériser complétement.

Dans la pratique, la projection $M'N'$ ne se trace pas sur un plan qui soit réellement vertical; on conçoit que ce plan ait tourné autour de sa base PP', jusqu'à venir s'appliquer sur $PP'KL'$: alors les points N' et M' se rabattent en décrivant des circonférences des points n et m comme centres, et dont les rayons sont les perpendiculaires $N'n$, $M'm$ abaissées des points N', M' sur la charnière: ces points viennent donc se placer en N', M' sur les prolongemens des lignes $N''n$, $M''m$, perpendiculaires à PP', puisque dans la rotation de PQ autour de sa charnière, les lignes $N'n$, $M'm$ n'ont pas cessé d'être perpendiculaires à PP' en n et m.

On peut supposer un troisième plan passant par $P'K'$ et $P'Q$, c'est-à-dire, perpendiculaire à chacun des deux premiers, sur lequel on ait aussi projeté la ligne MN par deux perpendiculaires menées des points M et N à ce plan.

Fig. 26. Ainsi, pour tout présenter dans une seule figure, on supposera ainsi que nous l'avons fait lorsqu'il s'agissait d'un point, trois axes AX, AY, AZ, réciproquement perpendiculaires l'un à l'autre, les deux premiers étant supposés dans le plan même de la planche qui figurera le plan horizontal, le troisième AZ étant vertical; les trois plans menés par AZ, AX; AZ, AY; AY, AX; seront réciproquement perpendiculaires l'un à l'autre, les deux premiers verticaux, et le troisième horizontal. Les trois projections de la ligne de l'espace, seront $M''N''$ dans le plan horizontal, $M'N'$ et $M''N''$ dans les plans verticaux.

Lorsque le plan vertical ZAX est rabattu dans le prolongement du plan horizontal, ce qu'on doit supposer pour le tracé graphique, les projections horizontale et verticale M''', M', correspondantes au même point de l'espace, sont dans une même perpendiculaire $M'M'''$ à l'axe AX. De même, les projections verticales M' et M'' du même point, se trouvent sur une perpendiculaire $M'M''$ à AZ, lorsque les deux plans verticaux sont l'un sur le prolongement de l'autre.

Pour bien se représenter la position de la droite de l'espace, résultante de ce système de projections, on imaginera les plans XAZ et $Y'AZ$ qui, pour le tracé graphique, n'en font qu'un, lequel est couché sur le prolongement du plan horizontal, on imaginera, dis-je, ce plan $XAZY'$ relevé à angle droit sur le plan du papier, puis la portion ZAY', tournant autour de AZ, jusqu'à ce que AY' coincide avec AY; alors si par les projections $M'N'$, $M''N''$, on élève des plans perpendiculaires aux plans ZAX, ZAY ainsi en position vraie, on aura par leur intersection la ligne de l'espace. Elle serait encore donnée par la rencontre des plans *projetans* élevés par $M'N'$, $M''N''$, et par $M'''N'''$, $M''N''$, aux plans qui contiennent ces projections. Ainsi, deux quelconques de ces trois projections isolent complètement la ligne de l'espace.

L'une quelconque de ces trois projections est la conséquence nécessaire des deux autres : en effet, le point de la ligne projeté en N', N''' est à une hauteur $N''n'''$, ou $N''n''$ au-dessus de sa projection horizontale N'''; la projection N' du même point, dans le plan vertical ZAY qui est la position vraie du plan ZAY', est donc à une hauteur $N''n''$ au-dessus du point n'' de l'axe AY, ce point n'' étant déterminé par la perpendiculaire $N''n''$ sur AY; si donc on ramène le point n'' sur AY', par un arc de cercle décrit de A, comme centre, avec An'' comme rayon, et qu'on élève par n'', la perpendiculaire $n''N''$ sur AY', on retrouve la seconde projection verticale N'' : on conclurait de même M'' des données M', M''', et conséquem-

ment la troisième projection $N''M''$ des deux premières; c'est ce que nous démontrerons plus loin par l'analyse.

20. On peut, au moyen de deux projections, construire en longueur vraie la ligne de l'espace. A cet effet, on observera que les points de la ligne, projetés horizontalement en M'', N'', et verticalement sur le plan XAZ, en M', N', sont à des hauteurs $M'm''$, $N'n''$ au-dessus de M'' et N''; ensorte que la ligne en question, les hauteurs verticales de ses points extrêmes, et sa projection horizontale forment un trapèze dont le plan est vertical. Si on imagine ce trapèze tournant autour de sa base $M''N''$ comme charnière, les perpendiculaires extrêmes, qui en sont les côtés parallèles, le seront constamment au plan ZAX en M'', N'', et elles n'auront pas varié de longueur : ainsi le trapèze rabattu sera $MNM''N''$, dans lequel NM est la ligne de l'espace.

Mais si par le point M on mène une parallèle Mv à $M''N''$, le triangle MNv, rectangle en v, donnera

$$\overline{MN}^2 = \overline{Nv}^2 + \overline{Mv}^2 = (NN'' - vN'')^2 + \overline{M''N''}^2$$
$$= (N'n'' - M'm'')^2 + \overline{M''N''}^2 = (An - Am)^2 + \overline{M''N''}^2.$$

Que par N'' on mène $N''v'$ parallèle à AX, et on aura

$$\overline{M''N''}^2 = \overline{M''v'}^2 + \overline{N''v'}^2 = (An'' - Am'')^2 + (An''' - Am'')^2;$$

donc

$$MN = \sqrt{\{(An - Am)^2 + (An'' - Am'')^2 + (An''' - Am'')^2\}}.$$

Ainsi la distance MN entre les deux points M et N est énoncée au moyen des distances de ces points aux axes rectangulaires, et si nous posons

$$An''' = x'', \quad Am''' = x'; \quad An'' = y'', \quad Am'' = y'; \quad An = z'', \quad Am = z',$$

il viendra cette expression de la distance,

$$MN = \sqrt{\{(z'' - z')^2 + (y'' - y')^2 + (x'' - x')^2\}},$$

Lorsque le point M est à l'origine, on a $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$, et

$$MN=\sqrt{z''^2+y''^2+x''^2}.$$

Telle est la valeur de la diagonale d'un parallélépipède rectangle construit sur les trois arêtes x'', y'', z''.

21. Nous avons vu (19) que deux projections définissaient une droite de position; ainsi l'équation d'une droite dans l'espace, sera le système des équations de deux de ses projections. Soient RL et $R'L'$ les projections d'une droite de l'espace sur les plans de projection ZAX, ZAY' ou ZAY, et un point quelconque de cette droite, projeté en M' et M''; il s'agit d'avoir la relation entre les coordonnées x, y, z de ce point. A cet effet, menons par R et par R' les parallèles Rp, $R'p'$ à AZ, et désignons par a et b les tangentes trigonométriques des angles $M'Rp$, $M''R'p'$, ou des angles faits par les projections avec des parallèles à l'axe AZ, et par α et β, les distances AR, AR'. Lorsque la droite est donnée, les projections en résultent, et on connaît a, b, α, β. Or on a Fig. 27.

$$\frac{pM'}{Rp}=a,\ \frac{p'M''}{R'p'}=b;\ \text{d'où}\ pM'=a.Rp,\ p'M''=b.R'p';$$

mais $pM'=PM'-Pp=PM'-AR$; $p'M''=PM''-Pp'=PM''-AR'$; donc

$$PM'-AR=a.AP;\ PM''-AR'=b.AP.$$

Or $AP=z$, $PM''=y$, $PM'=x$; conséquemment les équations des projections, sont

$$x-\alpha=az;\ y-\beta=bz,$$

ou $$(1)\ldots x=az+\alpha,\ y=bz+c\ldots(2),$$

dont le système exprime la droite de l'espace.

Nous avons vu (19) que la troisième projection $R''M''$ ré-

sultait graphiquement des deux autres : si on designe par c la tangente de l'angle qu'elle fait avec AX ou avec la parallèle $R''p''$, on aura

$$P''M'' = c.R''p'', \text{ ou } P'M'' - AR' = c(AP' - AR),$$

et conséquemment

$$y - \mathcal{C} = c(x - a) \ldots\ldots (3).$$

Si l'on suppose une ligne parallèle à celle de l'espace, menée par l'origine A, les tangentes trigonométriques a, b et c ne changeront pas, les longuers α et $\mathcal{C}$ deviendront nulles, et les équations des projections se changeront dans les suivantes,

$$x = az, \; y = bz, \; y = cx;$$

les deux premières divisées l'une par l'autre donnent $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, et on déduit de la dernière $\frac{y}{x} = c$; donc $c = \frac{b}{a}$, relation entre les tangentes trigonométriques des angles faits par chacune des trois projections avec chacun des axes rectangulaires : cette valeur de c reportée dans l'équation (3), donne

$$y - \mathcal{C} = \frac{b}{a}(x - \alpha).$$

Or qu'on élimine z entre (1) et (2), et on obtiendra ce résultat

$$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \mathcal{C}}{b}, \text{ d'où } y - \mathcal{C} = \frac{b}{a}(x - \alpha),$$

la même que (3) : par cette élimination de l'ordonnée z, on note la droite de l'espace indépendamment du z, ou plutôt, on prend en même temps toutes les droites de l'espace pour lesquelles la relation entre x et y resterait la même; ces droites ne peuvent être que celles qui se trouvent dans le plan suivant lequel la droite se projette horizontalement, droites

qui ont une commune projection horizontale (19) : ainsi les équations de deux projections emportent celle de la troisième, c'est-à-dire, que celle-ci est toujours une conséquence des deux premières.

Lorsqu'une droite est située dans un des plans coordonnés, sa projection sur les deux autres plans, est suivant les axes eux-mêmes : si elle se trouve dans le plan des xz, on a

$$b = 0, \quad \mathcal{C} = 0,$$

et ses équations deviennent

$$y = 0, \quad x = az + \alpha.$$

La première dit que la projection de la droite sur le plan des yz est suivant l'axe AZ, et la seconde représente effectivement sa projection sur le plan des xz, laquelle n'est autre que la droite elle-même.

Si la droite est parallèle, par exemple, au plan des xz, les équations des projections sur les plans XAY, XAZ, sont

$$y = \mathcal{C}, \quad x = az + \alpha,$$

$\mathcal{C}$ étant la distance constante de tous les points de la droite au plan de xz.

Pour trouver les coordonnées des points dans lesquels une droite dans l'espace rencontre les trois plans rectangulaires, il faut faire successivement dans les équations (1), (2), $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, et on trouve

$x = \alpha$, $y = \mathcal{C}$, pour le point où la droite perce le plan XAY,

$z = -\frac{\mathcal{C}}{b}$, $x = -\frac{a\mathcal{C}}{b} + \alpha$, pour celui où elle perce XAZ,

$z = -\frac{\alpha}{a}$, $y = -\frac{b\alpha}{a} + \mathcal{C}$, pour celui où elle perce ZAY.

Nous pouvons maintenant donner une autre expression de la longueur d'une portion définie d'une droite située dans l'espace (20).

Fig. 26. $M'N'$, $M''N''$, $M'''N'''$ sont les trois projections de la portion de ligne que nous considérons : si on les désigne par p, p'' et p''', on aura

$$p'^2 = (z'' - z')^2 + (x'' - x')^2$$
$$p''^2 = (z'' - z')^2 + (y'' - y')^2$$
$$p'''^2 = (y'' - y')^2 + (x'' - x')^2;$$

donc, en ajoutant et divisant par 2,

$$\frac{p'^2 + p''^2 + p'''^2}{2} = (z'' - z')^2 + (y'' - y')^2 + (x'' - x')^2 = \overline{MN}^2$$

conclusion qui a encore lieu pour $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$; et alors on a la longueur de la diagonale d'un parallélépipède rectangle au moyen de celles des trois arêtes contiguës à celui des angles solides trièdres par lequel on l'a menée.

22. Avant de résoudre quelques questions sur les lignes droites considérées dans l'espace, nous observerons que lorsqu'une droite est donnée dans l'espace, les élémens de sa position, a, b, α, $\mathcal{C}$ sont connus; et qu'au contraire, si elle doit être assujétie à une certaine position énoncée, ces quantités a, b, α, $\mathcal{C}$ sont des inconnues à évaluer d'après les conditions prescrites.

1°. *Trouver la condition sous laquelle deux droites de l'espace se rencontrent.*

Les équations de deux droites dans l'espace sont, pour l'une,

$$x = az + \alpha,$$
$$y = bz + \mathcal{C};$$

et pour l'autre,

$$x = a'z + \alpha',$$
$$y = b'z + \mathcal{C}';$$

il s'agit ici de trouver la relation entre les élémens de position a, b, α, $\mathcal{C}$; a', b', α', $\mathcal{C}'$, sous laquelle les droites se coupent. A cet effet, on éliminera x, y, z entre les quatre

équations, d'où résultera la condition d'intersection

$$(a' - a)(b' - b) - (c' - c)(a' - a) = 0.$$

2°. *Par un point donné dans l'espace, mener une droite parallèle à une autre droite donnée.*

Soient

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \gamma$$

les équations de la droite donnée ; soient x', y', z', les coordonnées du point donné, et

$$x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \gamma'$$

les équations de la droite cherchée : pour exprimer le parallélisme des deux droites, il faudra poser $a' = a$, $b' = b$, et pour que la seconde passe par le point donné, il faudra que ses équations soient satisfaites par x', y', z' : on aura donc

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z').$$

La conséquence de ces deux équations sera celle de la projection sur le plan des xy, savoir

$$y - y' = \frac{b}{a}(x - x').$$

3°. *Assujétir une droite à passer par deux points donnés dans l'espace.*

Soient $x', y', z', x'', y'', z''$ les coordonnées de ces points, et les équations de la droite cherchée

$$(1) \ldots\ldots x = az + \alpha, \quad y = bz + \gamma \ldots\ldots (2) ;$$

a, b, α, γ sont les inconnues à évaluer au moyen des coordonnées des points donnés. Pour que la droite passe par le point x', y', z', il faut que ses équations aient lieu pour $x = x'$,

$y=y'$, $z=z'$; ou qu'on ait

$$(3).....x'=az'+a,\ y'=bz'+c.....(4);$$

pour qu'elle passe par le point x'', y'', z'', il faut aussi que ses équations aient lieu pour $x=x''$, $y=y''$, $z=z''$, ou qu'on ait

$$(5).....x''=az''+a;\ y''=bz''+c.....(6);$$

Qu'on retranche (3) de (1) et (4) de (2), et on trouve

$$(7)...x-x'=a(z-z');\ y-y'=b(z-z')...(8).$$

Si on retranche (5) de (3) et (6) de (4), il vient

$$x'-x''=a(z'-z'');\ y'-y''=b(z'-z'');$$

d'où l'on déduit

$$a=\frac{x'-x''}{z'-z''},\ b=\frac{y'-y''}{z'-z''}.$$

Ces valeurs reportées dans (7) et (8) donnent ces équations de la droite cherchée,

$$x-x'=\frac{x'-x''}{z'-z''}(z-z');\ y-y'=\frac{y'-y''}{z'-z''}(z-z').$$

On pourra s'assurer que ces équations rendent toutes les conséquences des diverses hypothèses qu'on peut faire sur la position de chacun des points.

4°. *Trouver l'angle de deux droites données de position dans l'espace.*

Deux droites dans l'espace peuvent ne pas se couper, sans être parallèles, ce qui arrive lorsqu'elles ne sont pas dans un même plan; cependant leurs projections se coupent; mais alors la ligne qui joint deux de ces intersections, n'est plus perpendiculaire à l'intersection des plans de projection qui les ren-

ferment, circonstance qui a toujours lieu lorsque le point est celui de rencontre de deux droites.

On prend pour l'angle des deux droites celui que ferait l'une d'elles, avec une parallèle à l'autre, menée par un point quelconque de la première, et il est clair qu'on peut à ces droites substituer deux parallèles AL, AL' menées par l'origine A des coordonnées, parallèles qu'il faut voir dans l'espace, et dont les positions sont indiquées par les projections AM', AM'', AN', AN''. Fig. 28.

Si, à partir du point A, et sur chacune des parallèles AL, AL', on prend les longueurs $AM = AN = 1$, et qu'on mène la transversale MN, on aura, d'après un théorème de trigonométrie,

$$\cos MAN = \frac{\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 - \overline{MN}^2}{2AM.AN} = \frac{2 - \overline{MN}^2}{2}.$$

Mais x', y', z', x'', y'', z'' étant les coordonnées des points M et N, on sait (20) que

$$\begin{aligned}\overline{MN}^2 &= (x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2 \\ &= x''^2+y''^2+z''^2+x'^2+y'^2+z'^2-2(x''x'+y''y'+z''z') \\ &= \overline{AM}^2+\overline{AN}^2-2(x''x'+y''y'+z''z') = 2-2(x''x'+y''y'+z''z');\end{aligned}$$

donc

$$\cos MAN = x''x' + y''y' + z''z';$$

or les équations des droites AL, AL' qui passent par l'origine, sont (21);

$$x = az,\ y = bz;\quad x = a'z,\ y = b'z;$$

et comme ces droites passent aussi par les points M, N, on aura en même temps

$$x' = az',\ y' = bz';\ x'' = a'z'',\ y'' = b'z'';$$

ainsi

$$\cos MAN = (aa' + bb' + 1)z'z'';$$

mais à cause de

$$\overline{AM}^2 = 1 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$
$$\overline{AN}^2 = 1 = x''^2 + y''^2 + z''^2,$$

on obtiendra

$$z = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad z'' = \frac{1}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}};$$

et enfin

$$\cos MAN = \frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}} \ldots\ldots (N).$$

Le cosinus de l'angle de deux droites est donc ainsi évalué au moyen des tangentes a, b, a', b' des angles faits par les projections de ces droites sur les plans verticaux avec l'axe AZ, angles qui sont les données de la question.

Lorsque cet angle est droit, le cosinus est nul, et on a cette relation entre les nombres a, b, a', b',

$$aa' + bb' + 1 = 0.$$

Il sera facile de déduire de (N) les expressions des cosinus des angles faits par une droite fixe AL avec chacun des axes coordonnés. Lorsque AL' coincide avec AZ, les tangentes trigonométriques a', b' sont nulles, et on a

$$\cos MAN = \cos Z = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

AL' coincidant avec AY ou AY', la projection AN'' tombe sur cet axe; l'angle ZAN'' est droit, et $b' = \frac{1}{0}$, ou $\frac{1}{b'} = 0$; la projection AN' est concentrée en A, et $a' = 0$, puisque l'angle $N'AZ$ est nul : ces hypothèses introduites dans l'expression (N), après avoir divisé haut et bas par b', donnent

$$\cos MAN = \cos Y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Enfin, que AL' tombe suivant AX, la projection AN' est cet axe ; donc ZAN' est droit, d'où résultent $a' = \frac{1}{0}$, ou $\frac{1}{a'} = 0$, $b' = 0$, et après avoir divisé les deux termes de (N) par a', et introduit les valeurs précédentes, on obtient

$$\cos MAN = \cos X = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Qu'on fasse les carrés de $\cos Z$, $\cos Y$, $\cos X$, et qu'on les ajoute, et on parviendra à cette propriété,

$$\cos^2 Z + \cos^2 Y + \cos^2 X = 1.$$

On peut trouver directement cette relation dans le parallélépipède rectangle AM dont AM est la diagonale : il donne Fig. 29.

$$AC = AM \cos \alpha, \quad AB = AM \cos \mathcal{C},$$

en faisant $MAC = \alpha$, $MAB = \mathcal{C}$: on a de plus

$$AM' = AM \cos MAM' ;$$

mais d'ailleurs

$$AC = AM' \cos CAM', \quad AB = AM' \sin CAM' ;$$

égalant les valeurs de AC et celles de AB, on obtient

$$\cos \alpha = \cos MAM' . \cos CAM', \quad \cos \beta = \cos MAM' . \sin CAM' ;$$

et conséquemment

$$\cos^2 \alpha + \cos \mathcal{C}^2 = \cos^2 MAM' = 1 - \sin^2 MAM' = 1 - \cos^2 MAD,$$

désignant MAD par γ, on trouve enfin

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \mathcal{C} + \cos^2 \gamma = 1.$$

CHAPITRE IV.

De l'Équation du plan.

Fig. 30. 23. UN plan est toujours donné de position par ses deux traces sur deux des plans coordonnés : ainsi supposant les deux plans coordonnés ZAX, ZAY en position vraie, les lignes RT, RT' fixeront la position d'un plan dans l'espace.

On pourra considérer ce plan comme engendré par l'une des traces RT, qui se meut parallèlement à elle-même, en s'appuyant sur l'autre trace RT' qui sera la *directrice* du mouvement.

L'équation de la trace RT, est

$$z = ax + d;$$

celle de la trace RT',

$$z = by + d,$$

a et b étant les tangentes trigonométriques des angles de ces traces avec les axes AX, AY, et d la longueur AR.

La droite mobile, génératrice du plan, étant toujours parallèle à sa première position RT, et conséquemment au plan ZAX, les équations de ses projections sur les plans des xz et des xy, seront (21), pour toutes ses positions,

$$z = ax + \gamma,\ y = \zeta :$$

γ et ζ étant variables en passant d'une position à une autre; or elle doit rencontrer continuellement la seconde trace RT'

qui a pour équations

$$x = 0, \quad z = by + d;$$

donc on aura cette condition,

$$b\mathcal{C} + d = \gamma,$$

qui donne γ au moyen de $\mathcal{C}$; ensorte que les équations de la génératrice du plan, dans une position quelconque qui ne sera plus dépendante que de $\mathcal{C}$, seront

$$z = ax + b\mathcal{C} + d, \; y = \mathcal{C} :$$

éliminant $\mathcal{C}$ entre ces deux équations, le résultat sera indépendant de toute valeur de $\mathcal{C}$; il conviendra donc à toutes les positions de la droite mobile; et comme leur ensemble est le plan déterminé par les deux traces RT, RT', il sera l'équation du plan : ce résultat est

$$z = ax + by + d.$$

Pour $x=0$, $y=0$, on a $z=d$: d est donc, ainsi qu'on la vu, la coordonnée z du point du plan, qui correspond à l'origine.

Pour introduire plus de symétrie dans les calculs, on pourra mettre l'équation du plan sous la forme

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

dans laquelle des quatre constantes A, B, C et D, trois seulement sont nécessaires ; ainsi on aura $-\frac{A}{C} = a$, $-\frac{B}{C} = b$, $-\frac{D}{C} = d$.

Reprenons la première équation du plan

$$z = ax + by + d :$$

en y faisant successivement $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, les équa-

tions résultantes

$$\left|\begin{matrix} z=0 \\ ax+by+d=0 \end{matrix}\right. \quad \left|\begin{matrix} y=0 \\ z=ax+d \end{matrix}\right. \quad \left|\begin{matrix} x=0 \\ z=by+d \end{matrix}\right.$$

sont celles des traces du plan sur les plans des xy, des xz, des yz.

Si l'on fait encore dans l'équation du plan les hypothèses

$$\left|\begin{matrix} z=0 \\ y=0 \end{matrix}\right. \quad \left|\begin{matrix} x=0 \\ z=0 \end{matrix}\right. \quad \left|\begin{matrix} y=0 \\ x=0 \end{matrix}\right.$$

les valeurs qu'on en déduit pour x, y et z, savoir :

$$x=-\frac{d}{a}, y=-\frac{d}{b}, z=d,$$

sont les distances comptées de l'origine aux points de rencontre du plan avec les trois axes coordonnés.

L'équation d'un plan perpendiculaire à celui des xz, et passant par l'axe des y, est

$$x=az;$$

celle d'un plan perpendiculaire à celui des yz, mené par l'axe des x, est

$$y=bz;$$

enfin celle d'un plan mené par l'axe des z, est

$$y=cx;$$

a, b, étant les tangentes trigonométriques des angles faits par la trace du plan sur xz et sur yz avec l'axe des z, et c la tangente de la trace dans le plan xy avec l'axe des x.

Si ces plans toujours perpendiculaires aux trois plans de projection, ne passent plus par les axes, les équations deviennent, lorsque le plan est perpendiculaire à celui des xz,

$$x=az+\alpha,$$

lorsqu'il est perpendiculaire à celui des yz,

$$y = bz + c;$$

enfin, lorsqu'il l'est à celui des xy,

$$y = cx + \gamma.$$

Nous observerons que ces équations qui ne contiennent que deux des trois coordonnées du plan, et qui ne désignent qu'une ligne sur le plan de ces coordonnées, appartiennent cependant à un plan, puisque la coordonnée qui n'entre pas dans l'équation, se trouvant indépendante des deux autres, admet une infinité de valeurs pour chaque point de la trace, et ces valeurs répondent à tous les points du plan qui se trouvent sur cette coordonnée dans ses différentes positions : l'ensemble de ces positions constitue le plan de l'espace.

24. Lorsque le plan est assujéti à certaines conditions, comme de passer par trois points donnés, etc. etc., les quantités A, B, C, D, sont des quantités inconnues à déterminer, ainsi qu'on le verra dans les questions suivantes.

1°. *Mener un plan parallèle à un plan donné de position.*

L'équation du plan donné étant

$$z = ax + by + d,$$

et celle du plan cherché

$$z = a'x + b'y + d',$$

la condition du parallélisme est exprimée par

$$a' = a, \quad b' = b.$$

2°. *Faire passer un plan par trois points donnés dans l'espace.*

Les coordonnées des trois points donnés, sont

pour le premier.....x', y', z',
le second.....x'', y'', z'',
le troisième....x''', y''', z''',

or l'équation du plan cherché étant

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

on aura les trois conditions suivantes,

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + D &= 0, \\ Ax'' + By'' + Cz'' + D &= 0, \\ Ax''' + By''' + Cz''' + D &= 0, \end{aligned}$$

desquelles on déduira ces déterminations,

$$\begin{aligned} A &= y'(z''-z''') + y''(z'''-z') + y'''(z'-z'') \\ B &= z'(x''-x''') + z''(x'''-x') + z'''(x'-x'') \\ C &= x'(y''-y''') + x''(y'''-y') + x'''(y'-y'') \\ D &= x'(y''z'''-y'''z'') + x''(y'''z'-y'z''') + x'''(y'z''-y''z'), \end{aligned}$$

en observant qu'ici les coefficiens à évaluer, sont $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, $\frac{D}{C}$, et qu'on a le même nombre d'équations.

Fig. 31. Supposons que z', z'', z''' soient les projections sur le plan des xz du triangle des trois points donnés dans l'espace ; l'aire du trapèze $z''x''x'''z'''$ sera

$$\frac{z'''(x'''-x'')}{2} + \frac{z''(x'''-x'')}{2},$$

celle du trapèze $x'z'z''x''$ sera

$$\frac{z''(x''-x')}{2} + \frac{z'(x''-x')}{2},$$

et enfin celle du trapèze $x'z'z'''x'''$ sera

$$\frac{z'''(x'''-x')}{2} + \frac{z'(x'''-x')}{2}.$$

De la somme des deux premières surfaces retranchant la der-

nière, on aura pour différence celle du triangle projeté sur xz, laquelle sera

$$t' = \frac{B}{2} :$$

en désignant par t et t'' les projections du même triangle sur les plans yz, xy, on trouverait de la même manière

$$t = \tfrac{1}{2}A ; \quad t'' = \tfrac{1}{2}C.$$

Nous démontrerons (*prob.* 9°) que D est six fois la solidité d'une pyramide qui a pour base le triangle de l'espace, et pour sommet l'origine même des coordonnées.

3°. *Étant données les coordonnées d'un point et les équations d'une droite, trouver l'équation du plan qui passe par la droite et le point.*

Soient x', y' z' les coordonnées du point, et

$$x = az + \alpha, \; y = bz + \mathcal{C}, \; y - \mathcal{C} = \frac{b}{a}(x - \alpha)$$

les équations de la droite : il faut dire que le point et la droite sont dans le plan; d'abord nous écrirons que le plan passe par le point donné et par celui dans lequel la droite perce le plan des xy, point dont les coordonnées sont

$$z = 0, \; x = \alpha, \; y = \mathcal{C} :$$

ainsi l'équation du plan étant

$$z = Ax + By + D,$$

où A, B et D sont des coefficiens à déterminer, on aura ces deux conditions,

$$(1) \ldots\ldots z' = Ax' + By' + D,$$
$$(2) \ldots\ldots 0 = A\alpha + B\mathcal{C} + D;$$

mais si dans l'espace, la droite est dans le plan, en ramenant

la droite et le plan parallèlement à eux-mêmes jusqu'à l'origine des coordonnées, auquel cas leurs équations deviendront pour la droite,

$$x = az,\ y = bz,\ ay = bx,$$

et pour le plan,

$$z = Ax + By;$$

dans cette nouvelle position, la droite sera encore contenue dans le plan, ensorte que leurs coordonnées doivent être les mêmes; on aura donc

$$z = Aaz + Bbz, \text{ d'où } 1 = Aa + Bb \ldots\ldots (3).$$

Les équations (1), (2), (3) donneront les valeurs de A, B, D, en a, b, α et $\mathcal{C}$, et l'équation du plan deviendra

$$(x - x')(y' - bz' - \mathcal{C}) - (y - y')(x' - az' - \alpha) + (z - z')\{b(x' - \alpha) - a(y' - \mathcal{C})\} = 0.$$

On voit qu'en effet le point donné est dans le plan, puisque son équation est satisfaite par $x = x'$ $y = y'$, $z = z'$; elle a lieu aussi pour $x = az + \alpha$, $y = bz + \mathcal{C}$, et par-là le résultat ci-dessus se trouve encore vérifié.

4°. *Étant données les équations d'une droite et celle d'un plan, trouver* 1°. *les conditions qui doivent avoir lieu pour que le plan et la droite soient rectangulaires;* 2°. *les coordonnées du point dans lequel la droite perce le plan;* 3°. *la distance de ce point à un autre point donné ou sur la droite ou sur le plan.*

Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, les projections de cette droite sont perpendiculaires aux traces de même dénomination du plan. Soient

$$x = az + \alpha,\ y = bz + \mathcal{C}$$

les équations de la droite, et

$$z = Ax + By + D \quad \ldots$$

celle du plan : les équations des traces du plan sur les plans rectangulaires des xz, yz, sont

$$z = Ax + D,\ z = By + D,$$

ou

$$x = \frac{1}{A}z - \frac{D}{A},\ y = \frac{1}{B}z - \frac{D}{B};$$

et on doit avoir les relations

$$a \times \frac{1}{A} + 1 = 0,\ b \times \frac{1}{B} + 1 = 0,$$

d'où résultent

$$A = -a,\ B = -b;$$

donc l'équation du plan perpendiculaire devient

$$z + ax + by = D,$$

en observant qu'ici D reste indéterminé, parce que tout plan parallèle au precedent, est perpendiculaire à la droite.

Si on combine cette équation avec celles de la droite

$$x = az + \alpha,\ y = bz + \zeta,$$

on en déduira les valeurs de x, y, z coordonnées du point de rencontre de la droite et du plan.

En second lieu, reprenons le plan

$$z + ax + by = D,$$

et menons-lui une perpendiculaire d'un point donnée x', y', z' : les équations de cette ligne seront

$$x - x' = a(z - z');\ y - y' = b(z - z'),$$

et celle du plan perpendiculaire pourra être mise sous la forme

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = D - ax' - by' - z' :$$

soient X, Y, Z les coordonnées du point de rencontre de ce

plan et de la perpendiculaire, on aura

$$Z = z' + \frac{D - ax' - by' - z'}{1 + a^2 + b^2},$$

$$Y = y' + \frac{b(D - ax' - by' - z')}{1 + a^2 + b^2},$$

$$X = x' + \frac{a(D - ax' - by' - z')}{1 + a^2 + b^2}.$$

La longueur de la perpendiculaire comprise entre le point X, Y, Z, et le point x', y', z', est (20)

$$\sqrt{\{(X-x')^2 + (Y-y')^2 + (Z-z')^2\}} = \frac{D - ax' - by' - z'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Si le point donné est à l'origine, $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, ensorte que la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur un plan, a pour expression

$$P = \frac{D}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = \frac{D}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}.$$

Si le point donné est supposé sur le plan, on a

$$D - ax' - by' - z' = 0,$$

et la plus courte distance est nulle, ce qui doit arriver.

Considérons, en troisième lieu, un plan perpendiculaire à la droite, et passant par le point x', y', z'; on a pour son équation

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0,$$

en observant qu'alors le coefficient C est déterminé : celles de la droite, sont

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta :$$

pour trouver les coordonnées du point de rencontre de la droite

et du plan, on mettra les équations de la droite sous la forme

$$x - x' = az + \alpha - x',$$
$$y - y' = bz + \mathcal{C} - y',$$

et nommant X', Y', Z' les coordonnées du point de rencontre, on aura

$$Z' = \frac{a(x' - \alpha) + b(y' - \mathcal{C}) + z'}{1 + a^2 + b^2},$$

$$Y' = \mathcal{C} + \frac{b(a(x' - \alpha) + b(y' - \mathcal{C}) + z')}{1 + a^2 + b^2};$$

$$X' = \alpha + \frac{a(a(x' - \alpha) + b(y' - \mathcal{C}) + z')}{1 + a^2 + b^2};$$

Substituant dans le radical

$$\sqrt{(X' - x')^2 + (Y' - y')^2 + (Z' - z')^2}$$

pour X', Y', Z' leurs valeurs, on obtiendra l'expression de la portion de perpendiculaire située dans le plan, comprise entre le point donné x', y', z' et le point de rencontre X', Y', Z' de la droite de l'espace avec le plan.

Si la droite de l'espace passe par l'origine des coordonnées, ses équations deviennent

$$x = az, \; y = bz,$$

et le radical $\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}$ exprime la portion de cette ligne, comprise entre l'origine des coordonnées et le pied de la perpendiculaire abaissée du point x', y', z' sur cette droite: or dans cette hypothèse

$$\alpha = 0, \; \beta = 0,$$

$$Z' = \frac{ax' + by' + z'}{1 + a^2 + b^2}; \; Y' = bZ'; \; X' = aZ';$$

donc

$$\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} = \frac{ax' + by' + z'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

5°. *Trouver l'angle de deux droites données de position dans l'espace.*

Nous donnerons une seconde solution de ce problème déjà résolu (22°). Soient

$$x=az, y=bz; x=a'z, y=b'z$$

les équations des deux droites ramenées parallèlement à elles-mêmes à passer par l'origine : si d'un point quelconque de l'une, x', y', z', on abaisse une perpendiculaire sur l'autre, dans le triangle rectangle formé par cette perpendiculaire, et les portions des droites comprises entre l'origine et la transversale, on connaît la longueur des côtés qui comprennent l'angle cherché : l'un deux a pour expression

$$\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=P,$$

et l'autre a été trouvé précédemment égal à

$$\frac{ax'+by'+z'}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=P';$$

donc le cosinus de l'angle cherché, c'est-à-dire

$$\cos MAN=\frac{P'}{P}=\frac{ax'+by'+z'}{\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$
$$=\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+a'^2+b'^2}}$$

après avoir remplacé x', y' par leurs valeurs $a'z', b'z'$.

6°. *Trouver* 1° *l'angle de deux plans donnés;* 2° *ceux d'un plan avec les trois plans rectangulaires de projection.*

Soient

$$Ax+By+Cz+D=0,\ A'x+B'y+C'z+D'=0,$$

les équations des plans : si de l'origine on mène sur chacun d'eux une perpendiculaire, le cosinus de l'angle de ces droites sera le même que celui de l'angle des plans; les équations de

ces droites seront de la forme

$$x = az,\ y = bz,$$
$$x = a'z,\ y = b'z.$$

Pour qu'elles soient perpendiculaires aux plans, il faut qu'on ait

$$-a = -\frac{A}{C},\ -b = -\frac{B}{C},$$
$$-a' = -\frac{A'}{C'},\ -b' = -\frac{B'}{C'};$$

substituant ces valeurs dans l'expression du cosinus de l'angle de deux droites, trouvée (probl. 5°), on aura pour celui des deux plans

$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \ldots (M)$$

Si les deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, on doit avoir $\cos V = 0$, et la condition

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Si l'un des plans est le plan même des xy, alors son équation est $z = 0$, d'où

$$A' = 0,\ B' = 0,\ C' = 1,$$

et nommant V' l'angle correspondant, on a

$$\cos V' = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} : \ldots (1)$$

Si ce plan devient celui des xz, son équation étant $y = 0$, on a

$$A' = 0,\ B' = 1,\ C' = 0,$$

et nommant V'' l'angle correspondant, on a

$$\cos V'' = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} : \ldots (2)$$

Si ce plan se confond avec celui des yz, auquel cas son équation devient $x = 0$, d'où

$$A' = 1, \quad B' = 0, \quad C' = 0,$$

et conséquemment, en nommant V'' l'angle correspondant,

$$\cos V'' = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \ldots (3)$$

Des expressions (1), (2), (3), on déduit cette propriété

$$\cos^2 V' + \cos^2 V'' + \cos^2 V'' = 1.$$

7°. *Trouver l'angle d'une droite et d'un plan.*

Si l'on imagine par l'origine une parallèle à la droite et une perpendiculaire au plan, l'angle de ces deux droites sera le complément de l'angle cherché, et conséquemment le cosinus de l'angle des deux droites, sera le sinus de l'angle demandé.

Soient

$$x = az, \quad y = bz$$

les équations de la parallèle,

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation du plan : celles de la perpendiculaire menée par l'origine, seront

$$x = -\frac{A}{C}z, \quad y = -\frac{B}{C}z,$$

et faisant $C = -1$,

$$x = Az, \quad y = Bz,$$

et conséquemment le sinus cherché, sera

$$\sin = \frac{1 + aA + bB}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\sqrt{1 + A^2 + B^2}}.$$

8°. 1°. *Un triangle quelconque est à sa projection sur un des plans coordonnés, dans le rapport du rayon au cosinus de*

l'angle que fait le plan du triangle avec le plan sur lequel on le projète : 2°. une figure plane quelconque étant projetée sur trois plans rectangulaires, le carré de l'aire de cette figure, est égal à la somme des carrés des aires de ses trois projections.

En désignant par t, t', t'' les projections de l'aire d'un triangle sur les plans yz, xz, yx, et l'équation du plan étant

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

nous avons trouvé (*probl.* 2°)

$$t = \tfrac{1}{2} A,\ t' = \tfrac{1}{2} B,\ t'' = \tfrac{1}{2} C.$$

Or T étant le triangle de l'espace, et H une perpendiculaire menée de l'origine sur le plan de ce triangle, nous démontrerons (*probl.* 9°) qu'on a

$$\frac{D}{6} = \frac{H}{3} \times T,$$

D ayant l'acception énoncée (*probl.* 2°). Mais nous avons trouvé (*probl.* 4°)

$$P = \frac{D}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} = H$$

pour l'expression d'une perpendiculaire menée de l'origine sur un plan : remplaçant dans cette expression A par $\frac{A}{C}$, B par $\frac{B}{C}$, et D par $\frac{D}{C}$, pour qu'elle convienne au plan

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

on trouve

$$H = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

donc

$$\frac{D}{6} = \frac{D \times T}{3\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

d'où

$$T^2 = \tfrac{1}{4}\{A^2 + B^2 + C^2\} = t^2 + t'^2 + t''^2,$$

Nommant S l'aire d'un autre triangle, comprise dans le plan de T, s, s', s'' les aires de leurs projections, on aura aussi

$$S^2 = s^2 + s'^2 + s''^2,$$

etc.

Puisque

$$T = \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2},\ t = \tfrac{1}{2}A,\ t' = \tfrac{1}{2}B,\ t'' = \tfrac{1}{2}C,$$

on a

$$\frac{T}{t} = \frac{1}{\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}},\quad \frac{T}{t'} = \frac{1}{\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}},$$

$$\frac{T}{t''} = \frac{1}{\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}.$$

Or nous avons vu (probl. 6°.), que ces expressions étaient celles des rapports du rayon aux cosinus des angles que fait le plan de T avec chacun des trois plans rectangulaires de projection, ce qui est la première partie de la proposition.

Passons à la démonstration de la seconde partie : on peut mettre ces expressions

$$T^2 = t^2 + t'^2 + t''^2;\quad S^2 = s^2 + s'^2 + s''^2$$

sous la forme.

$$T = \frac{t}{T}t + \frac{t'}{T}t' + \frac{t''}{T}t'';\quad S = \frac{s}{S}s + \frac{s'}{S}s' + \frac{s''}{S}s''.$$

Mais, d'après le premier théorème, les rapports $\frac{t}{T}$, etc. sont

égaux aux rapports $\frac{s}{S}$ etc. ; donc

$$\frac{t}{T}=\frac{s}{S},\ \frac{t'}{T'}=\frac{s'}{S},\ \frac{t''}{T'}=\frac{s''}{S},$$

et conséquemment

$$T=\frac{st}{S}+\frac{s't'}{S}+\frac{t''s''}{S};\ \text{d'où}\ \ TS=st+s't'+s''t''.$$

Or

$$(T+S)^2=T^2+2ST+S^2=t^2+t'^2+t''^2+2ts+2t's'+2t''s'' \\ +s^2+s'^2+s''^2,$$

et de là

$$(T+S)^2=(t+s)^2+(t'+s')^2+(t''+s'')^2.$$

En prenant un troisième triangle R dans le plan des deux premiers T et S, dont les projections soient r, r', r'', on arriverait à cette propriété

$$(T+S+R)^2=(r+s+t)^2+(r'+s'+t')^2+(r''+s''+t'')^2,$$

démonstration de la seconde partie de l'énoncé. Il est bien entendu que les carrés des aires, sont les carrés des nombres qui les expriment.

9°. *Trouver l'expression de la solidité d'une pyramide triangulaire, au moyen des coordonnées des angles solides.*

Nous supposerons que le sommet de la pyramide soit à l'origine même des coordonnées, et nous prendrons x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' pour les coordonnées des angles solides M', M'', M''' de la base.

D'abord si on forme ces neuf quantités

$$\xi=y''z'''-z''y''',\ \eta=z''x'''-x''z''',\ \zeta=x''y'''-y''x''',$$
$$\xi'=z'y'''-y'z''',\ \eta'=x'z'''-z'x''',\ \zeta'=y'x'''-x'y''',$$
$$\xi''=y'z''-z'y'',\ \eta''=z'x''-x'z'',\ \zeta''=x'y''-y'x'';$$

je dis qu'en supposant entre les six quantités données, les six équations suivantes dont les trois premières expriment les carrés des distances de l'origine aux trois points M', M'' M''',

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= a, \quad x''x''' + y''y''' + z''z''' = b, \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= a', \quad x'x''' + y'y''' + z'z''' = b', \\ x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 &= a'', \quad x'x'' + y'y'' + z'z'' = b'', \end{aligned}$$

et faisant pour abréger,

$$\begin{aligned} \alpha &= a'a'' - b^2, \quad \mathcal{C} = b'b'' - ab, \\ \alpha' &= aa'' - b'^2, \quad \mathcal{C}' = bb'' - a'b', \\ \alpha'' &= aa' - b''^2, \quad \mathcal{C}'' = bb' - a''b'', \end{aligned}$$

on aura de même

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= \alpha, \quad \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = \mathcal{C}, \\ \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 &= \alpha', \quad \xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'' = \mathcal{C}', \\ \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 &= \alpha'', \quad \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \mathcal{C}'' : \end{aligned}$$

c'est ce dont on peut s'assurer par la substitution effective des valeurs, ξ, ξ', etc. η, η', etc. ζ, ζ' en x', y', z', etc. Posant encore

$$\Delta = x'(y''z''' - y'''z'') + x''(y'''z' - y'z''') + x'''(y'z'' - y''z'),$$

on trouverait

$$z'\zeta + x'\xi + y'\eta = \Delta, \; z'\zeta' + x'\xi' + y'\eta' = 0, \; z'\zeta'' + x'\xi'' + y'\eta'' = 0.$$

On sait que si f, g, h, sont les trois côtés d'un triangle rectiligne, son aire est exprimée par la formule

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{4}\sqrt{\{2f^2g^2 + 2f^2h^2 + 2g^2h^2 - f^4 + g^4 - h^4\}} \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{\{4f^2g^2 - (f^2 + g^2 - h^2)^2\}}. \end{aligned}$$

Ainsi pour le triangle $M'M''M'''$ dont les côtés sont supposés

Vc''', Vc'', Vc', on aura

$$16E^2 = 4c'c'' - (c' + c'' - c''')^2 :$$

or en observant que les quantités

$$a + a' - 2b'', \quad a + a'' - 2b', \quad a' + a'' - 2b$$

expriment les carrés des distances entre les points M', M'', M', M'''; M'', M'''; lesquelles sont aussi c''', c'', c', on aura

$$\begin{aligned} 4E^2 &= (a' + a'' - 2b)(a + a'' - 2b') - (a'' - b - b' + b'')^2 \\ &= aa' + aa'' + a'a'' - 2ab - 2a'b' - 2a''b'' + 2bb' + 2bb'' + 2b'b'' \\ &\quad - b^2 - b'^2 - b''^2 = \alpha + \alpha' + \alpha'' + 2\mathfrak{C} + 2\mathfrak{C}' + 2\mathfrak{C}''. \end{aligned}$$

Donc

$$E = \frac{V\{\alpha + \alpha' + \alpha'' + 2\mathfrak{C} + 2\mathfrak{C}' + 2\mathfrak{C}''\}}{2}.$$

Il faut maintenant trouver la hauteur H de la pyramide, c'est-à-dire, la longueur d'une perpendiculaire menée de l'origine sur le plan des points M', M'', M'''. Or l'équation d'un plan étant

$$z = Ax + By + D,$$

on a (probl. 2°)

$$A = -\frac{y'(z'' - z''') + y''(z''' - z') + y'''(z' - z'')}{x'(y'' - y''') + x''(y''' - y') + x'''(y' - y'')},$$

$$B = -\frac{z'(x'' - x''') + z''(x''' - x') + z'''(x' - x'')}{x'(y'' - y''') + x''(y''' - y') + x'''(y' - y'')},$$

c'est-à-dire en développant les termes et introduisant les abréviations ci-dessus,

$$A = -\frac{\xi + \xi' + \xi''}{\zeta + \zeta' + \zeta''}, \quad B = -\frac{n + n' + n''}{\zeta + \zeta' + \zeta''};$$

ensuite l'équation

$$z' = Ax' + By' + D$$

donnera

$$D = z' - Ax' - By' = \frac{z'(\zeta+\zeta'+\zeta'') + x'(\xi+\xi'+\xi'') + y'(\eta+\eta'+\eta'')}{\zeta+\zeta'+\zeta''},$$

et d'après les abréviations,

$$D = \frac{\Delta}{\zeta+\zeta'+\zeta''};$$

or on a trouvé (probl. 4°)

$$H = \frac{D}{\sqrt{1+A^2+B^2}};$$

substituant pour A, B et D leurs valeurs trouvées ci-dessus, il viendra

$$H = \frac{\Delta}{\sqrt{\{(\xi+\xi'+\xi'')^2+(\zeta+\zeta'+\zeta'')^2+(\eta+\eta'+\eta'')^2\}}},$$

c'est-à-dire, en développant les termes qui sont sous le radical, et faisant les substitutions en α, α', α'', 6, $6'$, $6''$,

$$H = \frac{\Delta}{\sqrt{\{\alpha+\alpha'+\alpha''+2\mathfrak{C}+2\mathfrak{C}'+2\mathfrak{C}''\}}}.$$

Donc enfin

$$\frac{E.H}{3} = \frac{\Delta}{6} = \frac{1}{6}\{x'(y''z'''-y'''z'')+x''(y'''z'-y'z''')+x'''(y'z''-y''z')\}.$$

Ainsi l'équation du plan des trois points, trouvée (probl. 2°), peut être écrite ainsi :

$$2t.x + 2t'.y + 2t''.z + D = 0.$$

10. *Deux droites étant données, trouver* 1°. *les équations de la droite qui est en même temps perpendiculaire à l'une et à l'autre, et sur laquelle se mesure leur plus courte distance;* 2°. *l'expression de cette plus courte distance.*

Nous écrirons d'abord que par l'une et l'autre droite on mène un plan, et que ces plans sont parallèles : soient

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \mathcal{C}$$

les équations de la première droite : elle perce le plan des xy en un point P, dont les coordonnées sont

$$z = 0, \quad y = \mathcal{C}, \quad x = \alpha :$$

la seconde droite dont les équations sont

$$x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \mathcal{C}'$$

perce le plan xy en un point P', dont les coordonnées sont

$$z = 0, \quad y = \mathcal{C}', \quad x = \alpha'.$$

Pour dire qu'nn plan passe par P, on écrira

$$\left.\begin{array}{l} z + Ax + By + D = 0 \\ 0 + A\alpha + B\mathcal{C} + D = 0 \end{array}\right\} \text{ d'où } z + A(x-\alpha) + B(y-\mathcal{C}) = 0 :$$

ici on a divisé l'équation générale du plan par C : pour dire aussi qu'un plan passe par P', on écrira

$$\left.\begin{array}{l} z + A'x + B'y + D' = 0 \\ 0 + A'\alpha' + B'\mathcal{C}' + D' = 0 \end{array}\right\} \text{ d'où } z + A'(\alpha'-\alpha') + B'(y-\mathcal{C}') = 0.$$

Mais les deux plans doivent être parallèles ; on a donc $A = A'$, $B = B'$, et

$$z + A(x-\alpha) + B(y-\mathcal{C}) = 0,$$
$$z + A(x-\alpha') + B(y-\mathcal{C}') = 0.$$

Reste à déterminer A et B d'après la condition que chacun de ces plans contienne la totalité de la droite par un point delaquelle il est mené : pour cela nous avons ces relations (probl. 3°)

$$1 + Aa + Bb = 0, \quad 1 + Aa' + Bb' = 0,$$

d'où résultent

$$A=\frac{b-b'}{ab'-a'b},\ B=\frac{a'-a}{ab'-a'b}.$$

Il s'agit de trouver l'équation d'une perpendiculaire à ces plans parallèles, et dont les extrémités soient sur chacune des droites : à cet effet, nous supposerons par P et par P' des droites perpendiculaires aux plans parallèles, puis par P et par la première droite, un plan qui sera perpendiculaire au plan parallèle, et dont la trace sur ce plan rencontrera la seconde droite; par P' et par la seconde droite, un plan perpendiculaire au premier, et dont la trace sur ce plan, rencontrera la première droite. Ces deux plans ainsi déterminés se couperont suivant une droite perpendiculaire à chacun des plans parallèles, et conséquemment à chacune des droites données : elle sera donc la transversale cherchée.

La perpendiculaire menée de P au plan de la seconde droite, a pour équations (prob. 4°)

$$x=Az+\alpha,\ y=Bz+\mathcal{C};$$

celle qui est menée de P' au plan de la première droite, a pour équations

$$x=Az+\alpha',\ x=Bz+\mathcal{C}';$$

le plan mené par la première de ces perpendiculaires et la première droite donnée, a pour équations

$$z+L(x-\alpha)+M(y-\mathcal{C})=0..\ (R)$$

L et M étant données par

$$1+LA+MB=0,\ 1+La+Mb=0:$$

le plan mené par la seconde perpendiculaire et la seconde droite, a pour équations

$$z+L'(x-\alpha')+M'(y-\mathcal{C}')=0...(S)$$

L' et M' étant déterminées par

$$1+L'A+M'B=0,\quad 1+L'a'+M'b'=0.$$

Substituant dans ces quatre équations les valeurs de A et B trouvées plus haut, on obtient

$$L=\frac{a-a'+b(ab'-a'b)}{a(a'-a)+b(b'-b)},\quad M=\frac{b-b'-a(ab'-a'b)}{a(a'-a)+b(b'-b)},$$
$$L'=\frac{a-a'+b'(ab'-a'b)}{a'(a'-a)+b'(b'-b)},\quad M'=\frac{b-b'-a'(ab'-a'b)}{a'(a'-a)+b'(b'-b)};$$

reportant ces valeurs dans les équations (R) et (S), on trouve celles-ci

$$(x-\alpha)\{a-a'+b(ab'-a'b)\}+(y-\mathcal{C})\{b-b'-a(ab'-a'b)\}$$
$$+z\{a(a'-a)+b(b'-b)\}=0,$$
$$(x-\alpha')\{a-a'+b'(ab'-a'b)\}+(y-\mathcal{C}')\{b-b'-a'(ab'-a'b)\}$$
$$+z\{a'(a'-a)+b'(b'-b)\}=0$$

dont la seconde aurait pu se déduire de la première, en y changeant a, b, α, $\mathcal{C}$, en a', b', α', $\mathcal{C}'$, et a', b', en a, b. Des deux équations précédentes, dont le système représente la droite en question, on tirerait par l'élimination successive de x et de y, celles des projections de la droite sur les plans des yz et des xz.

Nous chercherons enfin la longueur absolue de la plus courte distance : si de l'origine des coordonnées, on abaisse une perpendiculaire sur chacun des plans parallèles, ces perpendiculaires ayant même direction, se confondront, et leur différence qui sera la distance des deux plans, sera égale à la plus courte distance des droites données. Les grandeurs de ces perpendiculaires seront (prob. 4°)

$$P=\frac{A\alpha+B\mathcal{C}}{\sqrt{1+A^2+B^2}}$$

pour le plan

$$A(x-\alpha)+B(y-\mathcal{C})+z=0,$$

en observant qu'ici $D=A\alpha+B\mathcal{C}$; et

$$P'=\frac{A\alpha'+B\mathcal{C}'}{\sqrt{1+A^2+B^2}},$$

pour le plan

$$A(x-\alpha')+B(y-\mathcal{C}')+z=0,$$

pour lequel $D'=A\alpha'+B\mathcal{C}'$. La différence

$$P'-P=\frac{A(\alpha'-\alpha)+B(\mathcal{C}'-\mathcal{C})}{\sqrt{1+A^2+B^2}}$$

et mettant pour A et B leurs valeurs

$$P'-P=-\frac{(\alpha'-\alpha)(b'-b)-(\mathcal{C}'-\mathcal{C})(a'-a)}{\sqrt{\{(a'-a)^2+(b'-b)^2+(a'b-ab')\}}}.$$

Lorsque les droites données se rencontrent, cette distance est nulle, et on a

$$(\alpha'-\alpha)(b'-b)-(\mathcal{C}'-\mathcal{C})(a'-a)=0,$$

relation trouvée (22, probl. 1°), et qui exprime que deux droites se coupent.

CHAPITRE V.

De la transformation des coordonnées.

25. Il serait difficile de faire pressentir ici l'utilité des formules que nous allons démontrer; nous nous bornerons donc à observer qu'elles servent à faire passer d'un système à un autre système d'axes choisis de telle manière que l'équation de la ligne courbe qu'on considère, soit simplifiée sans cependant rien perdre de sa généralité; par-là sa description et la recherche de ses propriétés deviennent plus faciles, ainsi qu'on le verra bientôt. Pour ne rien laisser à desirer sur cette matière, nous avons joint à ces formules celles qui sont nécessaires pour effectuer la transformation des coordonnées en trois dimensions, ou dans l'espace.

26. Supposons qu'un point M soit rapporté par ses coordonnées $AP = x$, $PM = y$, aux axes AX, AY et à l'origine A, et qu'on veuille le rapporter à une autre origine A', donnée de position par rapport à A, et à des axes $A'X'$, $A'Y'$ parallèles aux premiers : on connaît donc les coordonnées $AB = a$, $BA' = b$ de la nouvelle origine : si l'on désigne par x', y' les coordonnées AP', $P'M$ du point M par rapport aux axes variés, on aura entre x, y, et x', y', les relations Fig. 32.

$$x = a + x', \quad y = b + y',$$

qui auraient encore lieu dans le cas où les axes AX, AY seraient obliques, pourvu que les seconds AX', AY' leur fussent parallèles.

27. Proposons-nous ces questions : 1°. *Passer d'un système de*

coordonnées obliques à un autre système de coordonnées obliques, en conservant l'origine.

AX, *AY* sont les axes primitifs auxquels est rapporté le
Fig. 33. point *M* par les coordonnées $AP=x$, $PM=y$; *AX'*, *AY'* sont les axes variés par rapport auxquels les coordonnées du point *M* sont $AP'=x'$, $P'M=y'$; l'angle entre les axes primitifs est $YAX=\mathcal{C}$, et les axes variés *AX'*, *AY'* font avec *AX* des angles $X'AX=\alpha$, $Y'AX=\alpha'$: on a

$$x = Ap + pP = Ap + P'p'$$
$$y = Mp' + p'P = Mp' + P'p.$$

Mais

$$Ap = \frac{\sin(\mathcal{C}-\alpha)}{\sin\mathcal{C}}x', \quad P'p' = \frac{\sin(\mathcal{C}-\alpha')}{\sin\mathcal{C}}y'$$
$$Mp' = \frac{y'\sin\alpha'}{\sin\mathcal{C}}, \qquad P'p = \frac{x'\sin\alpha}{\sin\mathcal{C}};$$

les valeurs des anciennes coordonnées y, x, sont donc

$$y = \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\alpha'}{\sin\mathcal{C}}; \quad x = \frac{\sin(\mathcal{C}-\alpha)x' + \sin(\mathcal{C}-\alpha')y'}{\sin\mathcal{C}}.$$

Si l'origine est déplacée,

$$(1)\ldots y = b + \frac{x'\sin\alpha + x'\sin\alpha'}{\sin\mathcal{C}}; \quad x = a + \frac{\sin(\mathcal{C}-\alpha)x' + \sin(\mathcal{C}-\alpha')y'}{\sin\mathcal{C}}.$$

2°. *Passer d'un système d'axes rectangulaires à un système d'axes obliques.*

Les axes primitifs *AX*, *AY* étant rectangulaires, l'angle $\mathcal{C}$ entre ces axes, est de 100°, et $\sin\mathcal{C}=1$: les formules précédentes deviennent donc

$$(2)\ldots y = b + x'\sin\alpha + y'\sin\alpha'; \quad x = a + x'\cos\alpha + y'\cos\alpha'.$$

3°. *Passer d'un système d'axes rectangulaires à un système d'axes rectangulaires.*

On a donc $\alpha' - \alpha = 100°$; conséquemment $\sin\alpha' = \cos\alpha$, $\cos\alpha' = -\sin\alpha$, et les formules (2) deviennent

$$(3)\ldots y = b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,\quad x = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha.$$

4°. Enfin *passer d'un système d'axes obliques à un système d'axes rectangulaires.*

On peut au moyen des formules (2) évaluer x', y' en x, y; ou bien on peut résoudre la question directement. $AP' = x'$, $P'M = y'$ sont les coordonnées obliques du point M, $AP = x$, $PM = y$ en sont les coordonnées rectangulaires : l'axe AX fait avec AY', AX' des angles α', α. On a Fig. 34.

$$MP' \text{ ou } y' : \cos\alpha :: Mp : \sin(\alpha' - \alpha)$$

$$Mp = MP - Pp = y - x\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

donc

$$y' = \frac{y\cos\alpha - x\sin\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)},$$

et en second lieu

$$AP' \text{ ou } x' : \sin\alpha' :: Ap' : \sin(\alpha' - \alpha)$$

$$Ap' = AP - p'P = x - y\frac{\cos\alpha'}{\sin\alpha'};$$

donc

$$x' = \frac{x\sin\alpha' - y\cos\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}.$$

Ainsi on a les formules

$$(4)\ldots y' = \frac{y\cos\alpha - x\sin\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)},\quad x' = \frac{x\sin\alpha' - y\cos\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}.$$

28. Passons à la transformation des coordonnées en trois dimensions.

AX, AY, AZ étant les trois axes rectangulaires primitifs, nous conserverons l'axe AZ, et en place des axes AX, AY,

nous prendrons d'autres axes AX', AY' toujours rectangu-
Fig. 35. laires, et situés dans le plan primitif YAX, ensorte que AZ, que nous désignerons par AZ', AY', AX' formeront encore un système d'axes rectangulaires ; l'angle $X'AX$ étant ψ, pour un point M de l'espace projeté en M', les coordonnées primitives x et y seront AP', $P'M'$, et les coordonnées variées x', y' seront AP, PM', la coordonnée z restant la même : on aura donc

$$x' = AP = AR - P'S = x\cos\psi - y\sin\psi$$
$$y' = PM' = RP' + SM' = x\sin\psi + y\cos\psi$$
$$z' = z.$$

Fig. 36. Nous conserverons l'axe AX', que nous appellerons AX'', et nous supposerons que le plan $X''AY'$ ait tourné autour de cet axe et au-dessous du plan horizontal, ensorte que l'axe AZ ou AZ' reste perpendiculaire au nouveau système d'axes AX'', AY'', les trois axes AX'', AY'', AZ'' étant toujours rectangulaires en A : θ est l'angle que fait AY'' avec AY', cet angle étant aussi celui de AZ' avec AZ'', et il faut voir que toutes ces lignes sont dans un plan qui contient la projection M'' du point sur le plan $Z'AY'$. Les coordonnées y', z' sont AP', $P'M''$, et les coordonnées variées y'', z'' sont AP, PM'' ; on a

$$y'' = AP = AR - P'S = y'\cos\theta - z'\sin\theta$$
$$z'' = PM'' = SM'' + P'R = z'\cos\theta + y'\sin\theta$$
$$x'' = x'.$$

Fig. 37. Enfin conservons l'axe AZ'', que nous désignerons par AZ''', et supposons que les axes AX'', AY'' varient de position dans leur plan, de manière à rester perpendiculaires l'un à l'autre, et qu'ils deviennent AX''', AY''', et soit φ l'angle de AX''' avec AX'' : on aura

$$x''' = AP = AR - P'S = x''\cos\varphi - y''\sin\varphi$$
$$y''' = M'''P = M'''S + P'R = y''\cos\varphi + x''\sin\varphi$$
$$z''' = z''.$$

Les valeurs de z'', y'', x'' ou des nouvelles coordonnées, énoncées au moyen des coordonnées primitives, seront donc

$$\begin{aligned}
z'' &= z\cos\theta + x\sin\psi\sin\theta + y\cos\psi\sin\theta,\\
y'' &= x\,(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta)\\
&\quad + y\,(\cos\varphi\cos\psi\cos\theta - \sin\varphi\sin\psi)\\
&\quad - z\cos\varphi\sin\theta.\\
x'' &= x\,(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta)\\
&\quad - y\,(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\cos\sin\psi\cos\theta)\\
&\quad + z\sin\varphi\sin\theta.
\end{aligned}$$

Si l'on voulait déplacer l'origine, il faudrait supposer

$$x_{,} = a + x'', \quad y_{,} = b + y'', \quad z_{,} = c + z'',$$

a, b et c étant les coordonnées de la nouvelle origine rapportée à l'ancienne.

Pour traduire les coordonnées primitives x, y, z en coordonnées nouvelles x'', y'', z'', on pourra d'abord au moyen des trois premières formules, évaluer x, y, z en x', y', z' et, d'après les trois secondes, on traduira x', y', z' en x'', y'', z'', ce qui donnera

$$\begin{aligned}
x &= x''\cos\downarrow + y''\cos\theta\sin\downarrow + z''\sin\theta\sin\downarrow\\
y &= -x''\sin\downarrow + y''\cos\theta\cos\downarrow + z''\sin\theta\cos\downarrow\\
z &= -y''\sin\theta + z''\cos\theta;
\end{aligned}$$

enfin les dernières formules donneront

$$\begin{aligned}
x'' &= x''\cos\varphi + y''\sin\varphi\\
y'' &= -x''\sin\varphi + y''\cos\varphi\\
z'' &= z''
\end{aligned}$$

et ces substitutions dans les précédentes donneront enfin x, y, z en x'', y'', z''. On verra (chap. XVII) l'emploi de ces formules.

CHAPITRE VI.

Equation de l'intersection de la surface conique par un plan.

29. Nous regarderons la surface conique comme engendrée par le mouvement d'une droite qui, dans toutes ses positions, est assujétie à passer par le même point de l'espace et par tous les points d'une circonférence dont le plan est horizontal ; l'expression analytique de cette génération, sera l'équation de la surface conique ; nous couperons ce cône par un plan et il s'agira de trouver l'équation de la courbe d'intersection

Les équations des projections sur les plans xz, yz d'une droite assujétie à passer par un point dont les coordonnées sont x', y', z', sont les suivantes,

$$(1)\ldots x - x' = a(z - z')\,;\ y - y' = b(z - z')\ldots(2)$$

la courbe individuelle qui dirige le mouvement de la génératrice, étant un cercle dans le plan horizontal, peut être considérée comme l'intersection d'une sphère par ce plan, ensorte qu'on aura ces équations de la sphère et du plan,

Fig. 38.

$$(3)\ldots z^2 + y^2 + x^2 = r^2\,;\ z = 0\ldots\ldots(4)$$

r désignant le rayon, x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la sphère, et le centre de la sphère étant la commune origine des coordonnées x', y', z'; x, y, z.

L'équation (4) réduit les trois premières aux suivantes :

$$x - x' = -az'\,,\ y - y' = -bz'\,,\ y^2 + x^2 = r^2.$$

Des deux premières équations on déduit

$$x^2=(x'-az')^2,\ y^2=(y'-bz')^2,$$

et substituant ces valeurs dans la troisième, on trouve

$$x'^2-2ax'z'+a^2z'^2+y'^2-2by'z'+b^2z'^2=r^2\ldots(5);$$

remplaçant a et b par leurs valeurs prises dans (1) et (2); à l'effet de faire rentrer dans (5) qui exprime déjà la loi de génération de la surface conique, les coordonnées x, y, z de tout point de cette surface, on trouve enfin

$$z'^2\left(\frac{y-y'}{z-z'}\right)^2-2y'z'\left(\frac{y-y'}{z-z'}\right)+z'^2\left(\frac{x-x'}{z-z'}\right)^2-2x'z'\left(\frac{x-x'}{z-z'}\right)$$
$$=r^2-(y'^2+x'^2).....(6).$$

Transportons maintenant l'origine des coordonnées du point A au point S, ou au sommet du cône, en laissant les axes qui passent par S, parallèles aux axes primitifs, et désignons par x'', y'', z'' les points de la surface, rapportés à la nouvelle origine; celles de S, rapportées au centre A, étant x', y', z' (nous avons ici inversé la figure pour plus de commodité): nous aurons entre les coordonnées d'un même point de la surface, rapporté aux deux origines S et A, dont la dernière est dans l'espace, ces trois relations, Fig. 38 (bis).

$$x''=x'-x;\ y''=y'-y;\ z''=z'-z:$$

ces valeurs reportées dans (6) donnent, après les réductions,

$$(x'^2+y'^2-r^2)z''^2+z'^2(x''^2+y''^2)-2x'z'x''z''-2y'z'y''z''=0..(7)$$

qu'on peut écrire ainsi,

$$(x'^2+y'^2-r^2)z^2+z'^2(x^2+y^2)-2x'z'xz-2y'z'yz=0.....(8);$$

en prenant x, y, z en place de x'', y'', z'' pour représenter les coordonnées générales de la surface conique, rapportées à l'origine S.

Nous supposerons maintenant le cône coupé par un plan perpendiculaire au plan vertical ZSX, qui est celui des xz, et nous chercherons l'équation de la courbe d'intersection, sous les différentes positions du plan sécant, cette courbe étant rapportée à des coordonnées prises dans ce plan.

Soient $Y''KX''$ ce plan coupant, N l'origine des coordonnées rectangulaires x'', y'' des points de la courbe d'intersection, coordonnées comptées de N sur NX'' et sur une horizontale menée par ce point dans le plan coupant. Désignant par θ l'angle du plan sécant avec le plan horizontal, et par α, γ, les coordonnées de la nouvelle origine N rapportée à l'ancienne : on aura ces relations,

Fig. 39.

$$x = Sp + NP = \alpha + \cos\theta . x'' = \alpha + mx'',$$
$$y = y'',$$
$$z = pN + PM = \gamma + \sin\theta . x'' = \gamma + nx''.$$

Substituant ces valeurs dans (8) et posant, pour abréger,

$$x'^2 + y'^2 - r^2 = p,$$

il viendra pour équation générale de l'intersection

$$z'^2y''^2 - 2ny'z'x''y'' + (pn^2 + z'^2m^2 - 2mnx'z')\,x''^2$$
$$- 2\gamma y'z'y'' + 2(p\gamma n + \alpha mz'^2 - \alpha nx'z' - \gamma mx'z')\,x''$$
$$+ p\gamma^2 + \alpha^2z'^2 - 2\alpha\gamma x'z' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Faisons, pour abréger,

$$z'^2 = A, \quad -2ny'z' = B, \quad pn^2 + z'^2m^2 - 2mnx'z' = C,$$
$$-2\gamma y'z' = D, \quad 2(p\gamma n + \alpha mz'^2 - \alpha nx'z' - \gamma mx'z') = E$$
$$p\gamma^2 + \alpha^2z'^2 - 2\alpha\gamma x'z' = F;$$

et de plus changeons encore x'', y'', z'', en x, y, z, et l'équation (9) deviendra

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \ldots\ldots (10).$$

Examinons maintenant les intersections résultantes des diverses positions du plan sécant.

Supposons d'abord le plan mené par S, et de plus l'origine N en S : alors

$$\alpha = 0,\ \gamma = 0;\ \text{d'où}\ D = 0,\ E = 0,\ F = 0,$$

et l'équation (10) se réduit à

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = 0,$$

laquelle résolue par rapport à y, donne

$$y = \left[\frac{-B \pm \sqrt{\{B^2 - 4AC\}}}{2A}\right] x \ldots (11).$$

Qu'on ait, sous les mêmes hypothèses,

$$B^2 - 4AC < 0 \ldots\ldots (12),$$

la section est imaginaire : elle est réelle pour

$$B^2 - 4AC > 0 \ldots\ldots (13),$$

et l'équation (11) représente le système de deux droites qu'on peut construire : dans le cas de

$$B^2 - 4AC = 0 \ldots\ldots (14),$$

les deux droites précédentes se réduisent à une seule. Nous assignerons bientôt les diverses situations du plan, correspondantes aux relations (12), (13), (14).

Faisons coïncider le plan coupant avec YSX, auquel cas,

$$\sin\theta = n = 0,\ m = 1,\ \alpha = 0,\ \gamma = 0,$$

en supposant l'origine en S : alors l'équation générale (10) se réduit à

$$y^2 + x^2 = 0;$$

donc que la section se réduit à un point qni est l'origine.

Donnons au plan coupant une position plus générale, en

Fig. 40. l'astreignant cependant à être parallèle à l'une des arêtes qui se trouvent dans le plan par l'axe du cône, mené parallèlement à xz, et supposons qu'il le soit à l'arête SB : nous pourrons imaginer le parallélepipède rectangle construit sur les coordonnées du centre A de la base, comme arêtes, et il est aisé de voir qu'on aura $\theta = EBF$; donc

$$\text{tang}\,\theta = \frac{EF}{EB} = \frac{z'}{x' - r} = \frac{n}{m};$$

d'où résulte

$$(nx' - mz')^2 = r^2n^2,$$

et en développant,

$$n^2x'^2 - 2mnx'z' + m^2z'^2 - r^2n^2 = 0;$$

et conséquemment

$$B^2 - 4AC = -4z'^2(-n^2y'^2 + pn^2 + m^2z'^2 - 2mnx'z')$$
$$= -4z'^2(n^2x'^2 - 2mnx'z' + m^2z'^2 - r^2n^2) = 0 \ldots (15),$$

en remplaçant p par sa valeur, et tenant compte de l'équation de condition.

Or l'équation (10) résolue par rapport à y, donne

$$y = -\frac{Bx+D}{2A}$$
$$\pm\frac{1}{2A}\sqrt{\{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF\}},$$

et d'après (15), elle se réduit à

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{\{2(BD-2AE)x+D^2-4AF\}}.$$

La courbe correspondante à cette équation, et qui est caractérisée par $B^2 - 4AC = 0$, se nomme *parabole* : elle est indéfinie dans un sens seulement.

Dans le cas de $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, on a, comme nous l'avons vu plus haut, $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, et la formule des ra-

cines y se réduit à

$$y = -\frac{Bx + D}{2A};$$

le plan sécant touche le cône suivant l'arête SB. Lorsque le plan est parallèle à l'autre arête SD,

$$\text{tang}\,\theta = \frac{EF}{ED} = \frac{z'}{x' + r} = \frac{n}{m},$$

et on retombe sur l'équation de condition (15) : le plan coupe alors, suivant une parabole, le cône inférieur opposé par le sommet à celui que nous avons considéré jusqu'ici.

Supposons qu'à partir de la position parallèle à SB, le plan coupant s'incline vers le plan horizontal, de manière à rencontrer les deux cônes opposés ; il résultera de cette position du plan, une courbe indéfinie dans les deux sens, formée de deux branches tracées sur les deux cônes ; on la nomme *hyperbole ;* mais alors

$$\text{tang}\,\theta = \frac{n}{m} < \frac{z'}{x' - r}, \text{ d'où } (nx' - mz')^2 < r^2 n^2$$

ou

$$n^2 x'^2 - 2mnx'z' + m^2 z'^2 - r^2 n^2 < 0,$$

et de là

$$-4z'^2(n^2x'^2 - 2mnx'z' + m^2z'^2 - r^2n^2) = B^2 - 4AC > 0 \ldots (16)$$

caractéristique de l'hyperbole.

Supposons enfin que le plan coupant traverse le cône BSD, position qui sera donnée par l'hypothèse

$$\text{tang}\,\theta = \frac{n}{m} > \frac{z'}{x' - r};$$

on en déduira

$$-4z'^2(n^2x'^2 - 2mnx'z' + m^2z'^2 - n^2r^2) = B^2 - 4AC < 0 \ldots (17)$$

La section correspondante sera une courbe fermée qu'on

nomme *ellipse ;* elle peut être un cercle, et nous rechercherons la position correspondante du plan sécant : il faut que l'équation de l'intersection soit

$$y^2 + x^2 - 2y'y - 2x'x + y'^2 + x'^2 - r^2 = 0,$$

qui, comme on le verra bientôt, appartient à un cercle : on a donc en même temps $B = 0$, $A = C$, c'est-à-dire, ces deux conditions

$$pn^2 + m^2z'^2 - 2mnx'z' = z'^2 ; ny'z' = 0 ;$$

on en déduit

$$\frac{n}{m}\left\{ (p - z'^2)\frac{n}{m} - 2x'z' \right\} = 0, y'z'\frac{n}{m} = 0 ;$$

et l'une des racines est $\text{tang}\,\theta = \frac{n}{m} = 0$; donc la section est circulaire, lorsque le plan coupant est parallèle à la base du cône ; ce qu'on sait déjà. La première de ces équations admet bien encore la racine

$$\text{tang}\,\theta = \frac{n}{m} = \frac{2x'z'}{p - z'^2} ;$$

mais la seconde ne peut devenir nulle pour cette valeur de θ, qu'autant qu'on a en même temps $y' = 0$, auquel cas la con-
Fig. 41. dition $B = 0$ a toujours lieu : sous cette hypothèse, le centre de la base du cône est dans le plan xz qui devient le plan par l'axe, et il s'agit de trouver alors la situation du plan coupant. On a

$$AB = \frac{BD}{2} = r, AG = x', SG = z', BG = x' - r ;$$

posons $DBS = B$, $BDS = D$; les formules trigonométriques connues donneront

$$\text{tang}\,(B - D) = \frac{\text{tang}\,B - \text{tang}\,D}{1 + \text{tang}\,B \,.\, \text{tang}\,D} ;$$

or

$$\text{tang}\, B = -\frac{SG}{BG} = -\frac{z'}{x'-r}; \quad \text{tang}\, D = \frac{SG}{DG} = \frac{z'}{x'+r};$$

il suit de là que

$$\text{tang}\,(B-D) = -\frac{2x'z'}{x'^2-z'^2-r^2} = -\frac{2x'z'}{p-z'^2};$$

et conséquemment

$$\text{tang}\,\theta = -\text{tang}\,(B-D);$$

donc si l'on mène la ligne $R'BR$ de manière que l'angle $SBR = D$, on aura

$$\text{tang}\, R'BD = -\text{tang}\, R'BG = -\text{tang}\,(B-D) = \text{tang}\,\theta;$$

ainsi une section, suivant la droite RR', ou suivant toute autre qui lui soit parallèle, par un plan perpendiculaire à BSD, sera circulaire.

Lorsque $x' = 0$, la seconde valeur de tang θ devient nulle; les deux sections se confondent, et alors le cône est droit, puisqu'on a déjà supposé $y' = 0$.

30. Donnons au cône une position qui rende plus facile l'examen des courbes que nous venons de découvrir : cette disposition dont on est le maître, ne diminuera en rien la généralité des résultats. L'hypothèse $y' = 0$ dans (9), fera rentrer le centre A de la base dans le plan vertical ZSX qui deviendra un plan par l'axe du cône, et changera l'équation (9) dans la suivante :

$$\begin{aligned} &z'^2y^2 + (pn^2 + m^2z'^2 - 2mnx'z')x^2 \\ &\quad + 2(p\gamma n + \alpha mz'^2 - \alpha nx'z' - \gamma mx'z')x \\ &\quad + p\gamma^2 + \alpha^2z'^2 - 2\alpha\gamma x'z' = 0 \ldots\ldots (18) \end{aligned}$$

où le terme du rectangle xy ne se trouve plus, et $p = x'^2 - r^2$.

Rien n'empêche de supposer $x' = 0$, et alors l'axe du cône

coincide avec SZ, et l'équation précédente se simplifie encore et devient

$$z'^2y^2 + (-r^2n^2 + m^2z'^2)x^2 + 2(-r^2\gamma n + \alpha m z'^2)x + \alpha^2 z'^2 - r^2\gamma^2 = 0 \ldots\ldots (19)$$

Les coefficiens A, B et C de l'équation générale (10), sont ici

$$A = z'^2,\ B = 0,\ C = -r^2n^2 + m^2z'^2 :$$

d'après ces valeurs, la caractéristique de la parabole qui était $B^2 - 4AC = 0$, se réduit à $-4AC$, et comme le coefficient A ne peut être nul, il faut que

$$C = -r^2n^2 + m^2z'^2 = 0 ;$$

conclusion à laquelle on peut encore parvenir, en observant qu'ayant trouvé pour la parabole,

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{n}{m} = \frac{z'}{x' - r} = \frac{z'}{-r}$$

dans la position particulière que nous venons de donner à la surface conique, il en résulte

$$-r^2n^2 + m^2z'^2 = 0.$$

Ainsi, pour la parabole, l'équation (19) se réduit à

$$z'^2y^2 + 2(-r^2\gamma n + \alpha m z'^2)x + \alpha^2 z'^2 - r^2\gamma^2 = 0 \ldots (20)$$

Pour toute abscisse x, on a deux valeurs de y, égales et de signes contraires; d'où l'on conclut que l'axe des x divise la courbe en deux parties symétriques : on appelle *sommet*, le point d'intersection d'un tel axe avec la courbe.

Pour ce sommet, l'ordonnée est nulle, et l'abcisse est la va-
Fig. 42. leur de x correspondante à $y = 0$ dans (20). Cette abscisse par-

ticulière, que nous désignerons par X, est

$$X = \frac{r^2\gamma^2 - \alpha^2 z'^2}{2(\alpha m z'^2 - r^2\gamma n)};$$

en supposant cette valeur positive, nous la porterons de N en A, et au-dessus de l'axe des y, et le point A sera le sommet.

Si l'on veut transporter l'origine des coordonnées de N en A, on aura entre une abscisse primitive $NP = x$, la nouvelle abscisse $AP = x'$, et la distance $NA = X$, la relation

$$x = x' + X = x' + \frac{r^2\gamma^2 - \alpha^2 z'^2}{2(\alpha m z'^2 - r^2\gamma n)}$$

et substituant pour x cette valeur dans (20), on trouvera, après les réductions,

$$z'^2 y^2 + 2(\alpha m z'^2 - \gamma n r^2)x' = 0 \ldots\ldots (21)$$

et représentant, pour abréger, $\frac{\gamma n r^2 - \alpha m^2 z'^2}{z'^2}$ par p,

$$y^2 - 2px' = 0, \text{ ou } y^2 = 2px' \ldots\ldots (22)$$

en changeant x' en x; alors le nouvel axe des y passe par le point A, et il est parallèle à sa position primitive.

Si l'on suppose l'angle au centre du cône, $= 100^d$, ce qui est une particularité de plus, on a ces conséquences, Fig. 43.

$$r = z', n = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, m = \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

et si l'origine N est sur un point de l'arête SD, on a de plus $\alpha = \gamma$; ensorte que $p = \alpha\sqrt{2}$, et l'équation de la parabole devient

$$y^2 = 2\alpha\sqrt{2}.x \ldots\ldots (23)$$

L'équation (19) représente donc les deux autres courbes déjà

connues sous les noms d'*ellipse* et d'*hyperbole*, lesquelles sont annoncées par

$$B^2-4AC<0,\ B^2-4AC>0;$$

ou par

$$-4AC<0,\ -4AC>0,$$

en tenant toujours compte de $B=0$; or, à cause de A positif, il faut qu'on ait pour l'ellipse

$$C \text{ ou } -r^2n^2+m^2z'^2<0,$$

et pour l'hyperbole

$$C \text{ ou } -r^2n^2+m^2z'^2>0:$$

mais ne considérons que la première de ces deux courbes, qui est toute entière sur l'une des deux surfaces coniques, et que nous supposerons sur celle du cône qui est au-dessus du plan horizontal passant par le sommet.

D'abord l'équation (19) indique qu'à toute abscisse x correspondent deux ordonnées y égales et de signes contraires; l'axe NX est donc symétrique dans la courbe; et on appelle encore *sommets*, les points A, A' dans lesquels cet axe est rencontré par la courbe: le caractère de ces points est $y=0$, et l'équation (19) donne pour abscisses correspondantes

$$X=\frac{(r^2\gamma n-\alpha mz'^2)\pm(\alpha n-\gamma m)rz'}{-r^2n^2+m^2z'^2};$$

il existe donc deux intersections: pour les construire, nous
Fig. 44. porterons de N en C, la longueur supposée positive

$$NC=\frac{r^2\gamma n-\alpha mz'^2}{-r^2n^2+m^2z'^2},$$

puis de C en A la quantité supposée de même signe

$$CA=\frac{\pm(\alpha n-\gamma m)rz'}{-r^2n^2+m^2z'^2},$$

et de C en A'

$$CA' = \frac{-(\alpha n - \gamma m) r z'}{-r^2 n^2 + m^2 z'^2},$$

le point C situé à distances égales des sommets A et A', est nommé *centre* de la courbe : on voit déjà que la parabole n'admet pas de centre.

Pour transporter l'origine de N en C, il faudra écrire entre les abscisses $NP = x$, $CP = x'$, la relation

$$x = x' + CN$$

et remplacer x par cette valeur dans (19); mais pour abréger le calcul, nous poserons

$$r^2 \gamma n - \alpha m z'^2 = N, \quad -r^2 n^2 + m^2 z'^2 = D;$$

ensorte que le résultat de la substitution, sera le suivant

$$z'^2 y^2 + D\left\{x'^2 + 2\frac{N}{D}x' + \frac{N^2}{D^2}\right\} - 2N\left(x' + \frac{N}{D}\right) + \alpha^2 z'^2 - r^2 \gamma^2 = 0$$

lequel après avoir effectué les opérations, et changé x' en x, devient

$$z'^2 y^2 + (-r^2 n^2 + m^2 z'^2) x^2 - \frac{(\alpha n - \gamma m)^2 r^2 z'^2}{-r^2 n^2 + m^2 z'^2} = 0 \ldots\ldots (24)$$

équation qui manque du terme de x.

Pour rapporter la courbe du centre C au sommet A considéré comme origine, nous poserons la relation

$$CP = CA - AP, \text{ ou } x = CA - x',$$

et faisant

$$(\alpha n - \gamma m) r z' = N, \quad -r^2 n^2 + m^2 z'^2 = D;$$

nous aurons pour résultat de ces substitutions dans (24),

$$z'^2 y^2 + D\left\{x'^2 - \frac{2N}{D}x' + \frac{N^2}{D^2}\right\} - \frac{N^2}{D} = 0,$$

c'est-à-dire, après la réduction, et le changement de x' en x,

$$z'^2y^2+(-r^2n^2+m^2z'^2)x^2-2(\alpha n-\gamma m)rz'x=0 \ldots\ldots (25)$$

équation au sommet.

L'équation (24) résolue par rapport à y, donne

$$y=\pm\frac{1}{z'}\sqrt{\left\{-(-r^2n^2+m^2z'^2)x^2+\frac{(\alpha n-\gamma m)^2r^2z'^2}{-r^2n^2+m^2z'^2}\right\}},$$

et à cause de

$$-r^2n^2+m^2z'^2>0,$$

le terme $\frac{(\alpha n-\gamma m)^2r^2z'^2}{-r^2n^2+m^2z'^2}$ est essentiellement positif, ensorte que la plus grande valeur qu'on puisse attribuer à x, est

$$x=\pm\frac{(\alpha n-\gamma m)rz'}{-r^2n^2+m^2z'^2};$$

pour toute abscisse plus grande, la courbe devient imaginaire; donc l'ellipse est toute entière comprise entre les sommets A et A'.

Il existe dans l'ellipse deux lignes remarquables, savoir CA, c'est-à-dire la moitié de la distance entre les sommets, et l'ordonnée CB du centre : nous chercherons à les introduire dans les équations (24) et (25) en place des quantités qui entrent dans les coefficiens, lesquelles sont en quelque sorte étrangères à la courbe. Nous avons déjà trouvé cette expression de CA que nous nommerons A, savoir

$$CA=A=\frac{(\alpha n-\gamma m)rz'}{-r^2n^2+m^2z'^2} \ldots\ldots (26)$$

l'ordonnée du centre, ou CB que nous représenterons par B, est la valeur de y, correspondante à $x=0$, dans (24); donc

$$CB=B=\frac{(\alpha n-\gamma m)r}{\sqrt{-r^2n^2+m^2z'^2}} \ldots (27).$$

De ces expressions de A et B, on déduit

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{-r^2n^2 + m^2z'^2}{z'^2},\quad B^2 = \frac{(an-\gamma m)^2r^2}{-r^2n^2+m^2z'^2}$$

$$\frac{B^2}{A} = \frac{(an-\gamma m)r}{z'};$$

ensorte que l'équation (24), divisée par z'^2, devient par le fait de ces substitutions

$$y^2 + \frac{B^2}{A^2}x^2 = B^2,\ \text{d'où}\ A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2 \ldots\ldots (28),$$

et l'équation (25)divisée par z'^2, se change dans la suivante

$$y^2 + \frac{B^2}{A^2}x^2 = \frac{2B^2}{A}x,\ \text{d'où}\ A^2y^2 + B^2x^2 = 2B^2Ax \ldots\ldots (29);$$

Que, pour simplifier encore les équations (24) et (25), on suppose l'angle au centre du cône, $= 100^d$, on a $r = z'$, et pour résultats de cette hypothèse, après la division par z'^2,

$$y^2 + (m^2 - n^2)x^2 - \frac{(an-\gamma m)^2}{m^2-n^2} = 0, \ldots\ldots (30)$$

$$y^2 + (m^2 - n^2)x^2 - 2(an-\gamma m)x' = 0 \ldots\ldots (31)$$

Si de plus on fait $\theta = 200^d$, auquel cas $n = 0$, $m = -1$; $A = \gamma$, la première devient

$$y^2 + x^2 - \gamma^2 = 0,\ \text{ou}\ y^2 + x^2 - A^2 = 0$$

équation d'un cercle rapporté au centre et au rayon A. Enfin, si $\theta = 0$, $\gamma = 0$, l'équation (30) donne

$$y^2 + x^2 = 0,$$

et l'ellipse dégénère en un point qui est le sommet du cône.

Pour l'hyperbole, les deux branches se trouvent sur les surfaces coniques opposées.

On portera encore les longueurs NC, CA et CA' déduites de l'équation (19) exactement de la même manière que pour l'ellipse, de N en C, et de C en A et en A'.

Fig. 45. Pour transporter l'origine de N en C, il faudra encore faire dans (19),

$$NP = NC + CP, \text{ ou } x = NC + x',$$

substitution qui ramènera à l'équation (24), et pour transporter l'origine du centre au sommet A, on posera dans celle-ci

$$x = CA + x',$$

et on sera conduit à la transformée

$$z'^2y^2 + (-r^2n^2 + m^2z'^2)x'^2 + 2(\alpha n - \gamma m)rz'x = 0 \ldots\ldots (32)$$

Mais la valeur de y correspondante à $x=0$, laquelle était réelle dans l'ellipse, devient imaginaire pour l'hyperbole qui est caractérisée par

$$-r^2n^2 + m^2z'^2 < 0;$$

ici nous prendrons pour B, non plus l'ordonnée correspondante à $x=0$, comme nous l'avons fait pour l'ellipse, mais seulement le facteur réel dans cette ordonnée, savoir,

$$B = \frac{(\alpha n - \gamma m)r}{\sqrt{r^2n^2 - m^2z'^2}};$$

alors on a

$$\frac{B^2}{A^2} = -\frac{-r^2n^2 + m^2z'^2}{z'^2}; \quad B^2 = \frac{(\alpha n - \gamma m)^2r^2}{r^2n^2 - m^2z'^2}$$

$$\frac{B^2}{A} = -\frac{(\alpha n - \gamma m)r}{z'}.$$

Ces substitutions faites dans les équations (24) et (32) les réduisent à

$$y^2 - \frac{B^2}{A^2}x^2 = -B^2, \text{ d'où } A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2, \ldots\ldots (33)$$

$$y^2 - \frac{B^2}{A^2}x^2 = +2\frac{B^2}{A}x, \text{ d'où } A^2y^2 - B^2x^2 = 2B^2Ax,$$

et si l'on compte les abscisses positives x de A vers A', c'est-à-dire, dans le même sens que celles de l'ellipse, cette dernière devient, en changeant $-x$ en $+x$,

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -2B^2Ax \ldots\ldots (34)$$

On passera donc des équations de l'ellipse aux équations analogues de l'hyperbole, en changeant dans celles-là B en $\frac{B}{\sqrt{-1}}$.

Pour l'angle au centre, $= 100^d$ et $\theta = 100^d$, auquel cas

$$r = z', \; n = 1, \; m = 0, \; a = A,$$

l'équation (23) se change dans celle-ci

$$y^2 - x^2 + A^2 = 0;$$

et alors l'hyperbole est dite *équilatère*. Pour $a = 0$, la courbe dégénère, ainsi que nous l'avons déjà reconnu, en deux droites données par

$$y^2 - x^2 = 0, \text{ d'où } (y - x)(y + x) = 0.$$

CHAPITRE VII.

Construction et discussion de l'équation générale du second degré à deux indéterminées.

31. Nous avons reconnu indépendamment de toute particularité dans la position du cône, que sous le caractère

$$B^2-4AC<0,$$

la courbe était fermée ou limitée dans tous les sens; que celle qui correspondait à

$$B^2-4AC=0$$

était indéfinie dans un sens seulement; et qu'enfin, pour

$$B^2-4AC>0,$$

la section était une courbe illimitée ou indéfinie dans tous les sens. On a pu remarquer, en même temps, qu'il n'y avait lieu qu'à ces trois variétés. Il importe maintenant de construire, sans avoir préliminairement simplifié l'équation générale (9); et si d'ailleurs, pour lui donner toute la généralité possible, nous laissons les coefficiens des variables, absolument indéterminés, nous obtiendrons toutes les lignes du *second ordre*. Cette équation peut être écrite ainsi :

$$Ay^2+(Bx+D)y+(Cx^2+Ex+F)=0:$$

résolue par rapport à y, elle donne

$$(1)\ldots y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{\{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF\}}.$$

Ce second membre est composé de deux parties qu'il faut soigneusement distinguer : l'une est rationnelle, savoir..... $-\frac{Bx+D}{2A}$; et l'autre est $+$ et $-\frac{1}{2A}\sqrt{\{\quad\}}$: occupons-nous d'abord de la première : pour la construire, soient les axes AX, AY : si nous prenons

$$AF=-\frac{D}{2A},$$

que nous menions FG parallèle à AX, et FH faisant avec FG un angle dont la tangente soit égale à $-\frac{B}{2A}$, nous aurons pour $AP=x$, fig. 46.

$$PP'=-\frac{Bx+D}{2A};$$

PP' représente donc la partie rationnelle de la valeur de y. Pour la même abscisse AP, le radical multiplié par $\frac{1}{2A}$, sera une ligne à porter de P' en M' pour le signe $-$, c'est-à-dire dans le prolongement de l'ordonnée PP' supposée négative, et de P' en M pour le signe $+$; ensorte que M et M' seront deux points de la courbe, correspondans à l'abscisse AP; et, en effet,

$$y=-PM=-PP'+P'M, y=-PM'=-PP'-P'M'.$$

On répétera la même construction pour toute abscisse x.

Cette ligne FH, qui a pour équation

$$Y=-\frac{Bx+D}{2A}\ldots\ldots(2),$$

jouit donc de la propriété de diviser en deux parties égales toutes les transversales MM' dans la courbe, parallèles à AY : c'est ce qui la fait nommer *diamètre de la courbe*.

32. La première recherche à faire est celle des points dans

lesquels la courbe peut couper ce diamètre : or ce qui caractérise complètement ces points, c'est que, pour eux, l'ordonnée de la courbe ne diffère pas de celle du diamètre; donc leurs abscisses seront données par l'égalité à zéro du radical : ainsi on doit poser

$$V\{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF\}=0,$$

ou bien

$$(B^2-4AC)\left\{x^2+\frac{2(BD-2AE)}{B^2-4AC}x+\frac{D^2-4AF}{B^2-4AC}\right\}=0.$$

Résolvant cette équation, on trouve ces deux valeurs de x,

$$x=\frac{-(BD-2AE)\pm V\{(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF\}}{B^2-4AC}..(3)$$

La condition de réalité de ces deux racines que nous désignerons par x', x'', est donc

$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)>0,.....(4)$$

ou bien, en effectuant les opérations,

$$4A(AE^2+CD^2+FB^2-BDE-4ACF)>0. . . . .(5)$$

Pour les construire, on portera la valeur linéaire $-\frac{BD-2AE}{B^2-4AC}$ de A en C, si elle est positive, et à gauche de A, si elle est négative; puis à partir de C, on prendra $CB'=+\frac{V\{\quad\}}{B^2-4AC}$, et $CB=-\frac{V\{\quad\}}{B^2-4AC}$. Cette marche est exactement la même que celle que nous avons suivie dans la construction des valeurs de y, et il importe de la bien retenir. Les points de la courbe, correspondans à ces abscisses $x'=AB$, $x''=AB'$, sont sur le diamètre en a et a', et ils ont pour ordonnées

$$y=-\frac{Bx'+D}{2A},\ y=-\frac{Bx''+D}{2A}.$$

On observera qu'à cause de $CB' = CB$, on a $C'a' = C'a$; ce qui a fait donner à ce point C' la dénomination déjà connue de *centre* de la courbe : si l'on désigne par X et Y ses coordonnées qu'on sait être

$$Y = -\frac{BX+D}{2A},\ X = -\frac{BD-2AE}{B^2-4AC},$$

on trouvera.

$$(6)\ldots\ldots Y = \frac{2CD-BE}{B^2-4AC};\ X = \frac{2AE-BD}{B^2-4AC}\ldots\ldots(7)$$

On conclut de ces expressions que la parabole ne comporte pas de centre.

Sous la relation

$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)<0$$

ou

$$4A(AE^2+CD^2+FB^2-BDE-4ACF)<0\ldots\ldots(8),$$

les racines x', x'' sont imaginaires; ensorte qu'il n'y a pas lieu à intersection de la courbe avec le diamètre FH; ce qui ne suffit cependant pas pour affirmer que la courbe soit imaginaire, puisqu'elle peut être située au-dessus ou au-dessous de ce diamètre. Pour

$$4A(AE^2+CD^2+FB^2-BDE-4ACF)=0\ldots\ldots(9),$$

les intersections a et a' se réunissent au centre C', puisque les abscisses AB, AB' deviennent AC.

33. Voyons ce que donnerait l'équation générale résolue par rapport à x : on trouve

$$x=-\frac{By+E}{2C}$$

$$\pm\frac{1}{2C}\sqrt{\{(B^2-4AC)y^2+2(BE-2CD)y+E^2-4CF\}}\ldots(10)$$

On construirait d'abord sur AY, comme axe des abscisses, la ligne droite $F'H'$ représentée par l'équation

$$X=-\frac{By+E}{2C}. \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

et les abscisses y', y'' des intersections α, α' de la courbe avec $F'H'$ qui est un autre diamètre, seraient données par l'égalité à zéro du polynome qui est sous le radical dans (10), c'est-à-dire qu'elles seraient les racines de

$$(B^2-4AC)\left\{y^2+\frac{2(BE-CD)}{B^2-4AC}y+\frac{E^2-4CF}{B^2-4AC}\right\}=0;$$

or ces racines sont réelles dans le cas de

$$4C(AE^2+CD^2+FB^2-BDE-4ACF)>0. \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

égales, si

$$4C(AE^2+CD^2+FB^2-BDE-4ACF)=0. \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

et imaginaires, si

$$4C(AE^2+CD^2+FB^2-BDE-4ACF)<0. \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Des conditions (5), (8), (12), (14), nous conclurons que la courbe peut, au défaut d'intersections avec le diamètre FH, en avoir avec le diamètre $F'H'$; et il est facile de reconnaître que ces deux diamètres se coupent au centre C; car si, pour trouver leur intersection, on suppose mêmes coordonnées dans les équations (2) et (11), on trouvera

$$x=-\frac{BD-2AE}{B^2-4AC},$$

valeur donnée par (7), et qui est celle de l'abscisse du centre.

34. Lorsque la courbe coupe les deux diamètres, on a donc quatre de ses points, et on peut, dans plusieurs cas, en obtenir un plus grand nombre : si, par exemple, on veut trouver ceux dans lesquels elle coupe l'axe de x, il faut faire $y=0$ dans l'équation générale, hypothèse qui la réduit à

$$Cx^2+Ex+F=0;$$

d'où résultent ces deux abscisses

$$x=\frac{-E\pm\sqrt{E^2-4CF}}{2C};\ldots.(15)$$

elles seront réelles inégales, égales, ou imaginaires, suivant qu'on aura

$$E^2-4CF>0,\ =0,\ <0;$$

dans le second cas, les deux intersections se réduiront à une seule, ensorte que l'axe des x n'aura qu'un point commun avec la courbe, il sera tangent.

De même, en faisant $x=0$, l'équation générale deviendra

$$Ay^2+Dy+F=0;$$

et les abscisses des intersections avec l'axe des y, seront

$$y=\frac{-D\pm\sqrt{D^2-4AF}}{2A};\ldots\ldots(16)$$

elles seront aussi réelles inégales, égales, ou imaginaires, suivant qu'on aura l'une ou l'autre de ces relations

$$D^2-4AF>0,=0,<0.$$

Pour le radical nul, la courbe ne fera que toucher l'axe des y.

35. Nous pouvons maintenant démontrer qne les lignes représentées par l'équation générale, comportent une infinité de diamètres qui tous se coupent au centre.

Fig. 47. Si l'on désigne par n et m le sinus et le cosinus de l'angle que fait le nouvel axe des y ou l'axe AY' avec l'axe primitif des x, et par x', y', les coordonnées obliques AP', $P'M$ auxquelles on rapporte la courbe, on aura ces relations

$$x = x' - ny', y = my',$$

et cette transformée

$$(Am^2 - Bmn + Cn^2)y'^2 + (Bm - 2Cn)x'y' + Cx'^2 + (Dm - En)y' + Ex' + F = 0.$$

L'équation de tout diamètre rapporté aux axes obliques AX, AY', sera donc

$$y' = -\frac{(Bm - 2Cn)x' + Dm - En}{2(Am^2 - Bmn + Cn^2)}.$$

Pour repasser à des coordonnées rectangulaires AP, PM', on emploiera ces relations

$$y' = \frac{y}{m}, x' = x + \frac{ny}{m},$$

substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et faisant les réductions, on obtiendra celle-ci

$$(2Am - Bn)y + (Bm - 2Cn)x + Dm - En = 0 \ldots (17).$$

Mais le diamètre donné par l'équation générale résolue par rapport à y, est

$$2Ay + Bx + D = 0, \ldots\ldots (18)$$

et il s'agit de trouver les coordonnées de l'intersection des droites (17) et (18) : multipliant à cet effet la seconde équation par m et retranchant le produit de la première, on trouvera

$$Bny + 2Cnx + En = 0, \text{ ou } By + 2Cx + E = 0;$$

ensorte que

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}=-\frac{2Cx+E}{B},$$

d'où l'on déduit ces valeurs des coordonnées d'intersection

$$x=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC},\quad y=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC},$$

qu'on sait être celles des coordonnées du centre; et comme ces résultats sont indépendans des quantités m et n relatives à l'obliquité des axes, on en conclut que tous les diamètres se coupent au centre.

36. Ce que nous venons de dire s'étend à toutes les lignes du second degré, puisque nous n'avons pas eu égard au signe de la caractéristique B^2-4AC, qui va maintenant entrer en considération.

Courbes limitées dans tous les sens.

Caractère $B^2-4AC<0$.

37. La formule générale des valeurs de l'ordonnée y, peut être énoncée de cette manière :

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)(x-x')(x-x'')},$$

en observant qu'on a dénoté par x' et x'' les racines de

$$x^2+\frac{2(BD-2AE)}{B^2-4AC}x+\frac{D^2-4AF}{B^2-4AC}=0:$$

lesquelles peuvent être réelles inégales, réelles et égales, ou imaginaires.

Supposons d'abord ces racines réelles inégales: lorsque la la valeur attribuée à x, qui est l'abscisse variable, sera

$> x' = AB$ et $< x'' = AB'$, les facteurs $x - x'$, $x - x''$
Fig. 46. qui, pour $x = AP$, représenteront $AP - AB$, $AP - AB'$, prendront des signes contraires, leur produit sera négatif; la quantité sous le radical sera positive, et conséquemment la double valeur de y sera réelle.

Pour $x = x' = AB$, et $x = x'' = AB'$, le radical s'évanouit, et les ordonnées correspondantes sont celles des intersections a et a' de l'ellipse avec le diamètre FH.

Lorsqu'on prend l'abscisse $x > AB'$ et, à plus forte raison, $> AB$, le radical et les valeurs de y deviennent imaginaires: il en est de même si on fait $x < AB$, et conséquemment $< AB'$.

La courbe est donc toute entière entre les deux limites BA, $B'A'$, parallèles à l'axe AY, limites dont on peut toujours assigner la position.

Mais lorsque les racines x', x'' sont réelles, les racines y', y'' le sont aussi, puisque le caractère $B^2 - 4AC < 0$, supposant essentiellement les coefficiens A et C de même signe, les conditions de réalité (5) et (12) ont lieu en même temps; ces deux abcisses y', y'' sont deux autres limites de la courbe parallèles aux x: cette courbe est donc fermée.

Ce qu'il est bien essentiel d'observer, c'est que toutes les conclusions que nous fournira cette discussion, sont immédiatement déduites de l'équation générale considérée isolément, et non plus comme représentant l'intersection d'une surface conique par un plan; ensorte que comme, sous ce point de vue, il y a lieu à distinguer les trois cas $B^2 - 4AC < 0$, $= 0$, > 0, parce que cette quantité est le facteur de x^2 sous le radical, on peut supposer qu'on ait eu pour objet de construire cette équation et d'énumérer les courbes qu'elle représente.

Passons au cas des racines réelles et égales: la formule générale ci-dessus devient

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{x - x'}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC}.$$

Pour $x >$ ou $< x'$, les deux racines y sont imaginaires; pour $x = x'$, elles se réduisent à une seule qui est

$$y = -\frac{Bx' + D}{2A},$$

ordonnée du centre C' dans lequel toute l'ellipse est alors concentrée; et, en effet, dans ce cas l'abscisse x' a pour valeur

$$x' = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} = AC.$$

Supposons enfin les deux racines x', x'' imaginaires: le produit $(x - x')(x - x'')$ est donc un polynome qui ne peut changer de signe, quelque valeur qu'on donne à x (Alg. ch. 28, pag. 438); conséquemment il doit conserver celui de x^2, et le produit de ce polynome par $B^2 - 4AC$, doit être constamment négatif; donc les valeurs de y sont indéfiniment imaginaires, et comme les racines y', y'' sont imaginaires en même temps que x', x'' (8 et 14), la courbe, sous la relation

$$4A(AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF) < 0,$$

n'a pas d'intersections avec les diamètres FH et $F'H'$; et réciproquement, par cela seul que l'ellipse ne coupe pas l'un de ces deux diamètres, elle est nécessairement imaginaire, ce qu'on ne peut pas dire de l'hyperbole, comme on le verra plus loin.

38. Il résulte du caractère de l'ellipse $B^2 - 4AC < 0$, 1°. que les coefficiens A et C ont essentiellement le même signe, quel que soit le nombre B; 2°. qu'aucun de ces coefficiens ne peut être nul. Lorsque $B = 0$, les diamètres FH et $F'H'$ deviennent parallèles aux axes AX, AY; si, de plus, $A = C$, l'équation générale devient

$$y^2 + x^2 + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A}x + \frac{F}{A} = 0,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\left(y+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(x+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2};$$

les expressions des coordonnées du centre se réduisent à

$$y=-\frac{D}{2A}=Ac, \quad x=-\frac{E}{2A}=AC;$$

et comme, sous ces hypothèses, le radical qui exprime CB, ou CB' devient le même que celui qui donne Cb ou Cb', on
Fig. 48. a $aa'=\alpha\alpha'$, propriété qui rapproche cette courbe du cercle; et, en effet, si on transporte l'origine de A en C' par les substitutions

$$y=y'-\frac{D}{2A}, \; x=x'-\frac{E}{2A},$$

on aura pour transformée

$$y'^2+x'^2=R^2,$$

R^2 désignant $\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}$. C'est l'équation d'un cercle, l'origine des coordonnées étant prise au centre.

39. Dans l'ellipse, les diamètres FH, $F'H'$ ne peuvent être rectangulaires qu'autant que B est nul; autrement, on serait conduit à la relation $A=-C$, laquelle est incompatible avec le caractère $B^2-4AC<0$.

40. Les dégénérations de l'ellipse sont donc le point isolé, la courbe imaginaire, et le cercle qui offre ces deux circonstances.

41. Pour éclaircir ce qui précède par un exemple, proposons-nous de construire la courbe de l'équation

$$(x-y)^2+3(x+y)^2=a,$$

cette équation revient à

$$y^2 + xy + x^2 = \frac{a}{4};$$

et on en déduit

$$y = -\frac{x}{2} \pm \frac{\sqrt{-3x^2 + a}}{2};$$

comme le coefficient de x^2 est négatif, la courbe est une ellipse ; elle ne peut être un cercle, parce que le terme du rectangle existe. Le diamètre FH est donné par

Fig. 49.

$$y = -\frac{x}{2},$$

il passe par l'origine A ; et on en trouve un second point en prenant au-dessous de l'axe des x, une ordonnée quelconque moitié de l'abscisse : les abscisses des intersections de la courbe avec ce diamètre, sont les racines de la quantité sous le radical, égalée à zéro, savoir de

$$-3x^2 + a = 0, \text{ d'où } x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}};$$

on les portera de A en B et en B', AB étant $= AB'$. Pour $x > \sqrt{\frac{a}{3}}$, les ordonnées y sont imaginaires ; les limites de la courbe, parallèles aux y, sont donc Ba, $B'a'$. On aurait

$$x = -\frac{y}{2} \pm \frac{\sqrt{-3y^2 + a}}{2}$$

et pour équation du second diamètre $F'H'$,

$$x = -\frac{y}{2};$$

donc l'origine est le centre de la courbe : ses intersections avec $F'H'$, ont pour abscisses les racines de

$$-3y^2 + a = 0, \text{ d'où } y = \pm\sqrt{\frac{a}{3}};$$

ayant donc pris $Ab = Ab' = AB$, et élevé les perpendiculaires $b\alpha$, $b'\alpha'$, on aura les intersections α, α' qui seront deux nouveaux points de la courbe, et les limites $b\alpha$, $b'\alpha'$ seront parallèles aux x. Cherchons les intersections de la courbe avec l'axe des y, lesquelles sont caractérisées par $x = 0$, et ont pour ordonnées

$$y = \pm \frac{\sqrt{a}}{2}$$

ayant donc pris $AR = AR' = \frac{\sqrt{a}}{2}$, on aura en R et R' deux nouveaux points : à $y = 0$ correspondent ces deux racines

$$x = \pm \frac{\sqrt{a}}{2},$$

qu'on portera de A en r et r'. Nous avons donc, en totalité, six points de la courbe, et il serait facile d'en déterminer beaucoup d'autres, et même de les multiplier à tel point que le trait qui les joindrait, la représentât avec une exactitude suffisante ; mais elle sera toujours plus facile à décrire, lorsqu'on connaîtra ses axes principaux, comme nous le verrons plus loin.

Supposons que l'équation manque de terme tout connu, ou plutôt que a diminue jusqu'à devenir zéro ; la formule des racines qui se change dans celle-ci

$$y = -\frac{x}{2} \pm \frac{\sqrt{-3x^2}}{2},$$

annonce que, pour toute valeur de x, autre que 0 ; les ordonnées sont imaginaires ; pour $x = 0$, on a $y = 0$; la courbe est donc réduite à son centre ; conclusion qu'il était facile de prévoir.

Si le terme tout connu était $= -\frac{a}{4}$, les ordonnées

$$y = -\frac{x}{2} \pm \frac{\sqrt{-3x^2 - a}}{2}$$

seraient indéfiniment imaginaires, et la courbe n'existerait pas.

Supposons enfin que le terme du rectangle manque dans l'équation proposée, ce qui revient au cas de $B=0$, alors

$$y=\pm\frac{\sqrt{-4x^2+a}}{2};\quad x=\pm\frac{\sqrt{-4y^2+a}}{2};$$

les deux diamètres sont les axes coordonnés eux-mêmes; les intersections a et a' tombent en R et R', et α, α' en r et r', et on sait d'ailleurs que la courbe est un cercle; car, outre $B=0$, on a $A=C$.

42. Les élèves feront bien de s'exercer sur un grand nombre d'équations, en appliquant immédiatement à chacune d'elles, les raisonnemens faits sur l'équation générale, et sans recourir à la comparaison : de cette manière ils se familiariseront avec la marche de la discussion, qui sera la seule chose à retenir.

Courbes limitées dans un sens, et indéfinies dans l'autre.

Caractère $B^2-4AC=0$.

43. La formule générale des valeurs de y, devient donc

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{\{2(BD-2AE)x+D^2-4AF\}}\ldots(1);$$

le diamètre FH de cette courbe sera toujours donné par la partie rationnelle de cette formule, c'est-à-dire, par l'équation Fig. 50.

$$Y=-\frac{Bx+D}{2A}\ldots\ldots(2),$$

et il divisera également les doubles transversales de la courbe, parallèles à l'axe des y, puisque chaque ordonnée $y=PP'$

doit être augmentée et diminuée également pour en revenir aux points M', M, de la courbe.

Pour obtenir les abscisses d'intersection de cette courbe avec le diamètre (2), si cependant elles sont multiples, il faudra écrire l'ordonnée du diamètre, égale à celle de la courbe, ou poser

$$2(BD-2AE)x+D^2-4AF=0, \text{ d'où } x=-\frac{D^2-4AF}{2(BD-2AE)}=x' \ldots (3);$$

l'intersection a est donc unique. La formule (1) devient, en y introduisant cette abscisse x',

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{\{2(BD-2AE)(x-x')\}}\ldots(4).$$

Supposons positifs l'abscisse $x'=AB$, ainsi que le coefficient $2(BD-2AE)$: pour toute abscisse $x>x'$, le facteur $x-x'$ sera positif, et les ordonnées y seront réelles; mais pour $x<x'$, elles deviendront imaginaires, ainsi que pour $x=-x$: la courbe s'étendra donc infiniment à droite de l'intersection a, ou de la limite BaB'. Pour l'abscisse x' toujours positive, si le coefficient $2(BD-2AE)$ est négatif, la courbe sera située à gauche de la limite BB'. L'élève reconnaîtra sans peine la position correspondante à l'abscisse x' négative, le coefficient $2(BD-2AE)$ étant positif ou négatif.

Qu'on résolve l'équation par rapport à x, et on aura

$$x=-\frac{By+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{\{2(BE-2CD)y+E^2-4CF\}}\ldots(5),$$

et pour le diamètre $F'H'$

$$X=-\frac{By+E}{2C}\ldots\ldots(6);$$

celui-ci divise en deux parties égales les doubles transversa-

les parallèles à l'axe des x : mais on déduit de (6),

$$y = -\frac{2CX}{B} - \frac{E}{B} \ldots\ldots (7);$$

or le caractère de la parabole donne cette relation,

$$\frac{2C}{B} = \frac{B}{2A},$$

qui, portée dans (7), transforme cette équation dans la suivante,

$$y = -\frac{BX}{2A} - \frac{E}{B} \ldots\ldots (8):$$

Les diamètres FH, $F'H'$ sont donc parallèles, puisqu'ils font le même angle avec l'axe des abscisses : ce parallélisme s'explique facilement ; en effet, nous avons démontré, sans particulariser l'espèce de courbe, que les deux diamètres se coupaient au centre, et pour l'abscisse de ce point, nous avons trouvé

$$x = -\frac{BD - 2AE}{B^2 - 4AC}.$$

Mais pour la parabole, cette expression devenant infinie, les diamètres ne se rencontrent plus, ils sont donc parallèles.

44. La courbe a donc deux limites BB', bb', la première parallèle aux y, la seconde parallèle aux x, et deux diamètres donnés par les parties rationnelles des racines y et x. Mais si B étant nul, on a de plus $A = 0$, hypothèses sous lesquelles la parabole a lieu; puisqu'on a toujours $B^2 - 4AC = 0$, il n'existe plus que le diamètre $F'H'$, lequel devient parallèle à l'axe des y : on conçoit en effet que l'autre ne peut satisfaire à la condition de lui être parallèle, et de couper également les doubles transversales parallèles aux y : d'ailleurs son équation devenant $y = -\frac{D}{0}$, on est averti par-là que ce diamètre est impossible.

Mais sans que la relation $B^2 - 4AC = 0$ soit altérée, il peut arriver qu'on ait

$$BD - 2AE = 0,$$

auquel cas la formule (1) se réduit à

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{D^2 - 4AF} \ldots\ldots (9);$$

mais de la caractéristique de la courbe et de l'hypothèse que nous avons faite, on déduit

$$\frac{B}{D} = \frac{2C}{E}, \text{ d'où } BE - 2CD = 0,$$

et conséquemment l'équation (5) se réduit à

$$x = -\frac{By + E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{E^2 - 4CF} \ldots\ldots (10),$$

qu'on démontrera facilement être la même que (9), ensorte que les formules (9) et (10) s'accordent à donner deux droites qui seront réelles et distinctes, imaginaires, ou qui se réduiront à une seule, suivant qu'on aura l'une ou l'autre de ces trois relations,

$$D^2 - 4AF > 0,\ = 0,\ < 0:$$

Fig 51. sous la première, les deux droites RL, $R'L'$ sont parallèles, et elles ont pour diamètre la droite FH donnée par

$$Y = -\frac{Bx + D}{2A},$$

qui leur est parallèle, et qui coupe toutes les transversales MM' en deux parties égales. On peut concevoir cette dégénération de la parabole en deux droites, en supposant que l'abscisse $x' = AB$ de l'intersection de la courbe avec le diamètre, donnée par (2), ait augmenté par les diminutions successives du dénominateur $2(BD - 2AE)$ jusqu'à....

$2(BD - 2AE) = 0$; alors les deux portions ma, $m'a$ de la branche parabolique, vont se raccorder en des points a de plus en plus éloignés, et enfin elles ne se rencontrent plus, et se changent dans un système de droites parallèles.

Sous la seconde relation, l'ordonnée se réduit à

$$y = -\frac{Bx + D}{2A},$$

et les deux droites n'en font plus qu'une, qui est le diamètre FH de la courbe, ou des deux droites précédentes. Alors l'abscisse de l'intersection devient

$$x = -\frac{D^2 - 4AF}{2(BD - 2AE)} = \frac{0}{0},$$

valeur indéterminée qui signifie que tous les points du diamètre sont autant d'intersections; d'où résulte que la courbe s'étend sur son diamètre.

Enfin sous la troisième, les valeurs de y et les droites sont imaginaires : tel est le dernier terme de l'existence de cette courbe.

Les dégénérations de la parabole sont donc deux droites parallèles, la droite unique qui était son diamètre, et la courbe imaginaire.

45. Construisons la courbe de l'équation

$$y^2 - 2xy + x^2 - x = 1 :$$

sa résolution par rapport à y donne

$$y = x \pm \sqrt{(x + 1)}.$$

Aux abscisses x positives, correspondent indéfiniment des ordonnées réelles; pour toute abscisse négative et moindre que l'unité, on a encore des points de la courbe; pour $x = -1$, l'ordonnée est nulle, et pour des abscisses négativement plus grandes que -1, elle est et reste indéfiniment imaginaire; la

courbe est donc indéfinie dans un sens, et illimitée dans l'autre ;
Fig. 52. c'est une parabole, et, en effet, la condition $B^2 - 4AC = 0$ est satisfaite. L'un des diamètres FH de cette courbe est

$$y = x ;$$

il passe par l'origine A, et fait avec l'axe des x un angle de 50^d : l'abscisse de l'intersection de la courbe avec FH, est donnée par

$$x + 1 = 0, \text{ d'où } x = -1 = AB.$$

L'équation étant résolue par rapport à x, on trouve

$$x = y + \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\{y + \tfrac{5}{4}\}} :$$

le diamètre $F'H'$ est donc

$$x = y + \tfrac{1}{2} ;$$

et ses intersections avec les axes des x et des y, sont données par

$$x = \tfrac{1}{2} = Ai, \; y = -\tfrac{1}{2} = Ai',$$

et celle de ce diamètre avec la courbe, par

$$y + \tfrac{5}{4} = 0, \text{ d'où } y = -\tfrac{5}{4} = -1 - \tfrac{1}{4} = Ab.$$

A l'hypothèse $x = 0$, correspondent

$$y = 1 = AR, \; y = -1 = AR',$$

et pour $y = 0$, on obtient

$$x = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} ;$$

or $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ est $> \frac{1}{2}$ et < 2, et $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ est < -1 et $> -\frac{1}{2}$; ces deux valeurs de x sont, la première, Ar, et la seconde, Ar'.

Si l'on supprime le terme $-x$ dans la proposée, elle

devient

$$y^2 - 2xy + x^2 = 1,$$

et on en déduit ces deux formules

$$y = x \pm 1, \quad x = y \pm 1,$$

qui se réduisent à

$$y = x \pm 1,$$

équation de deux droites parallèles entre elles, et ayant pour diamètre *FH* qui leur est parallèle. Que dans cette dernière, on anéantisse le terme connu, ou l'unité, l'équation résultante

$$y^2 - 2xy + x^2 = 0$$

donnera

$$y = x,$$

c'est-à-dire, le seul diamètre *FH*. Que dans la même équation, on change $+1$ en -1, et les deux droites

$$y = x \pm \sqrt{-1}$$

seront imaginaires.

Prenons pour dernier exemple l'équation

$$x^2 + y - x = 0:$$

résolue par rapport à x, elle donne

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-4y + 1}}{2},$$

et comme les valeurs de x ne peuvent être réelles qu'autant que

$$y = \text{ou} < \tfrac{1}{4},$$

on conclura que la courbe est imaginaire au-delà de $y = +\frac{1}{4}$; conséquemment elle est une parabole; son diamètre a pour équation

$$x = \tfrac{1}{2},$$

et l'abscisse de l'intersection a de la courbe avec ce diamètre, est

$$y = \tfrac{1}{4}.$$

Fig. 53. Pour avoir l'autre diamètre, il faut résoudre l'équation par rapport à y; mais comme cette variable ne s'y trouve qu'au premier degré, ce diamètre est impossible (44).

Les intersections de la courbe avec l'axe des y, résultent de $x = 0$, hypothèse pour laquelle on a

$$y = 0,$$

ensorte que la courbe passe par l'origine A; pour $y = 0$, on trouve

$$x = 0, \quad x = 1 = AR.$$

46. Ces deux exemples serviront en même temps à éclairer la théorie, et à guider les élèves dans la discussion relative à la parabole.

Courbes indéfinies dans tous les sens.

Caractère $B^2 - 4AC > 0$.

47. Reprenons toujours la formule générale des racines

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)\left\{x^2+2\frac{(BD-2AE)}{B^2-4AC}x+\frac{D^2-4AF}{B^2-4AC}\right\}}.$$

et continuons à désigner par x', x'', celles du trinôme

$$x^2 + 2\frac{BD-2AE}{B^2-4AC}x + \frac{D^2-4AF}{B^2-4AC} = 0;$$

on aura donc

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{\{(B^2-4AC)(x-x')(x-x'')\}} \quad (1)$$

Si l'on suppose que les racines x' et x'' qui, comme on le sait, sont celles des intersections de la courbe avec le diamètre

$$Y = -\frac{Bx + D}{2A},$$

soient réelles et inégales, et de plus que x'' soit plus grande que x', pour $x > x''$, et conséquemment $> x'$, les deux racines y seront toujours réelles, à cause de $B^2 - 4AC > 0$; elles seront encore telles pour $x < x'$, et *à fortiori* $< x''$: mais pour toute abscisse, $x > x'$ et $< x''$, les racines y seront imaginaires : l'hyperbole n'aura donc aucun point entre les *limites* Fig. 46
Ba, $B'a'$, et de ses deux branches, l'une sera tout entière au-delà de $B'a'$, et l'autre en-deçà de Ba.

Venons au cas où les deux racines x', x'' toujours réelles, sont égales entre elles : la formule précédente devient alors

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{x - x'}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)},$$

équation de deux droites réelles, et qui ne sont plus parallèles, ainsi qu'il arrive dans la parabole, parce que le coefficient de x change en passant d'une droite à l'autre.

Supposons enfin les deux racines x', x'' imaginaires; alors la courbe ne peut couper le diamètre FH; cependant comme le polynome facteur de $B^2 - 4AC$, sous le radical, dans la valeur de y, ne peut changer de signe, et qu'il prend celui de $B^2 - 4AC$, le radical est réel pour toutes les abscisses x : l'hyperbole existe donc.

48. Nous avons reconnu, par rapport à l'ellipse, que les racines y', y'' devenaient imaginaires en même temps que les racines x', x''; la même chose n'a pas nécessairement lieu dans l'hyperbole, et, pour s'en convaincre, qu'on se reporte à ces expressions

$$4A(AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF)$$
$$4C(AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF),$$

dont le signe détermine (32 et 33) la réalité et l'imaginarité des racines x', x''; y', y''; on verra que, lorsque les coefficiens A et C ont même signe, ces racines sont réelles ou imaginaires en même temps, et que, lorsqu'ils ont des signes contraires, les deux dernières sont réelles, si les deux premières sont imaginaires, et réciproquement, parce qu'alors les relations >0, <0 ont lieu en sens contraire. Ainsi l'hyperbole, peut, au défaut d'intersections avec le diamètre FH, en avoir avec le diamètre $F'H'$; elle peut aussi ne les couper ni l'un ni l'autre, et cependant exister.

49. Le caractère hyperbolique a lieu pour $A=0$, pour $C=0$, pour $A=C=0$; il a encore lieu, si B étant nul, les coefficiens A et C sont de signes différens: on peut d'ailleurs faire telles hypothèses qu'on voudra sur D, E et F.

Supposons d'abord $B=0$; les deux diamètres FH, $F'H'$, deviennent respectivement parallèles aux axes; ils sont donc rectangulaires; si de plus $A=-C$, l'équation générale devient

$$Ay^2 - Ax^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

ou, divisant par A,

$$y^2 - x^2 + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A}x + \frac{F}{A} = 0:$$

les coordonnées du centre sont

$$y = -\frac{D}{2A},\ x = \frac{E}{2A},$$

et l'équation de la courbe peut être écrite ainsi,

$$\left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 - \left(x - \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 - E^2 - 4AF}{4A^2}.$$

Pour la rapporter au centre, il faudra établir ces relations,

$$y = y' - \frac{D}{2A},\ x = x' + \frac{E}{2A},$$

et on aura la transformée

$$y'^2 - x'^2 = \frac{D^2 - E^2 - 4AF}{4A^2}.$$

Cette hyperbole se nomme *équilatère ;* elle est à l'hyperbole en général, ce que le cercle est l'ellipse (38) ; ses deux diamètres FH, $F'H'$ sont rectangulaires. Si $D = E = F = 0$, l'hyperbole équilatère se change dans les deux droites

$$y'^2 - x'^2 = 0, \text{ d'où } y' = \pm x'.$$

Nous avons trouvé

$$y = -\frac{Bx + D}{2A}, \; x = -\frac{By + E}{2C},$$

pour les équations des deux diamètres FH, $F'H'$; les tangentes des angles qu'ils font avec l'axe des abscisses sont donc $-\frac{B}{2A}$; $-\frac{2C}{B}$, ensorte que la relation

$$aa' + 1 = 0, \text{ ou } \frac{2CB}{2AB} = -1 = \frac{C}{A}$$

ne peut avoir lieu qu'autant qu'on a

$$C = -A,$$

quelle que soit d'ailleurs la valeur de B.

Des Asymptotes.

50. Reprenons la formule générale des racines

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}(ax^2 + bx + c)^{\frac{1}{2}},$$

en faisant

$$B^2 - 4AC = a, \; 2(BD - 2AE) = b, \; D^2 - 4AF = c:$$

on pourra l'écrire ainsi qu'il suit,

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{x}{2A}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on regarde la somme des deux termes $\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$ comme un seul terme, on aura à faire la puissance $\frac{1}{2}$ du binôme $a+\left(\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)$, laquelle sera

$$a^{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{2a^{\frac{1}{2}}}-\frac{\left(\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)^2}{8a^{\frac{3}{2}}}+\text{etc.}$$

ensorte qu'on trouvera pour la formule des valeurs de y, ordonnée suivant les puissances décroissantes de x,

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{x}{2A}\left\{a^{\frac{1}{2}}+\frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}-\frac{b^2}{8a^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{1}{x^2}+\text{etc.}\right\},$$

ou

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\left\{a^{\frac{1}{2}}x+\frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}+\left(\frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}-\frac{b^2}{8a^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{1}{x}+\text{etc.}\right\}.$$

Il est maintenant facile d'assigner les équations d'un système de droites dans lesquelles la courbe tende à se changer, lorsque l'abscisse augmente, ou dont la formule des ordonnées soit la *limite* de celle des ordonnées de la courbe. Pour des valeurs croissantes de x, la portion du développement, à partir du terme multiplié par $\frac{1}{x}$, inclusivement, diminue, et peut devenir moindre que toute quantité donnée, en prenant x convenablement; il résulte d'ailleurs de la notion de limite, que les termes constans $-\frac{D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\cdot\frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}$ doivent faire partie de

l'expression limite, puisqu'autrement la quantité et sa limite auraient une différence finie : ainsi, pour des valeurs indéfiniment croissantes de x, la formule des ordonnées tend vers celle-ci,

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\left\{a^{\frac{1}{2}}x + \frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}\right\},$$

qui représente le système de deux droites qu'on nomme *asymptotes* de la courbe.

Pour avoir les intersections de ces asymptotes avec le diamètre représenté par

$$y = -\frac{Bx+D}{2A},$$

il faut poser

$$a^{\frac{1}{2}}x + \frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

et par-là, on considère le point commun aux droites et au diamètre : on déduit de cette équation

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{BD-2AE}{B^2-4AC},$$

c'est-à-dire, l'abscisse du centre. Ainsi les asymptotes se coupent au centre de la courbe, et on observera de plus qu'elles sont placées symétriquement par rapport au diamètre que nous venons de considérer, puisque, rapportées à cette ligne, elles ont pour ordonnées

$$\pm\frac{1}{2A}\left(a^{\frac{1}{2}}x + \frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}\right)$$

ou

$$\pm\frac{1}{2A}\left\{x\sqrt{B^2-4AC} + \frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}\right\}.$$

L'hyperbole est la seule des trois courbes du premier degré, qui comporte des asymptotes, à raison du signe de B^2-4AC.

51. Supposons que la proposée manque des termes de x^2 et de x, c'est-à-dire que les coefficiens C et E soient nuls : la courbe n'en sera pas moins une hyperbole, puisque la quantité B^2-4AC qui se reduit à B^2 est >0. Sous ces hypothèses, l'équation aux asymptotes

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\left\{x\sqrt{B^2-4AC}+\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}\right\}\ldots\ldots(M)$$

donne, en tenant compte du double signe, les deux suivantes,

$$y=0,\ x=-\frac{A}{B}y-\frac{D}{B},$$

dont la première dit qu'une des asymptotes est l'axe même des abscisses.

52. Que le seul terme de x^2 manque, ou que $C=0$, on a ces équations,

$$y=-\frac{E}{B},\ x=-\frac{A}{B}y-\frac{BD-AE}{B^2},$$

dont la première dit qu'une des asymptotes est seulement parallèle à l'axe des x.

53. Il résulte déjà de cet examen que, lorsque le seul carré x^2 manque dans l'équation des asymptotes, l'une d'elles est parallèle à l'axe des x, et qu'elle se confond avec cet axe, si le terme en x manque en même temps, celui du rectangle restant dans l'équation.

54. L'équation des asymptotes se refuse à l'hypothèse $A=0$; mais alors il faut partir de l'équation générale résolue par rapport à x, laquelle en posant

$$B^2-4AC=a,\ 2(BE-2CD)=b',\ E^2-4CF=c',$$

donne après le développement de la puissance $\frac{1}{2}$ du trinôme

sous le radical,

$$x=-\frac{By+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\left\{a^{\frac{1}{2}}y+\frac{b'}{2a^{\frac{1}{2}}}+\left(\frac{c'}{2a^{\frac{1}{2}}}-\frac{b'^2}{8a^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{1}{y}+\text{etc.}\right\},$$

formule qui a pour limite

$$x=-\frac{By+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\left\{y\sqrt{B^2-4AC}+\frac{BE-2CD}{\sqrt{B^2-4AC}}\right\}\ldots\ldots(N).$$

55. Cependant il ne faut pas croire que les systèmes d'asymptotes données par les formules (M) et (N) soient differens.

En effet, si dans (N) on dégage y, on trouve, pour le signe supérieur du radical,

$$y=\frac{2Cx}{-B+\sqrt{B^2-4AC}}+\text{etc.}$$

et pour le signe inférieur,

$$y=\frac{2Cx}{-B-\sqrt{B^2-4AC}}+\text{etc.};$$

la première de ces valeurs se réduit à

$$y=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}x+\text{etc.}$$

et la seconde à

$$y=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}x+\text{etc.}$$

Or ces deux asymptotes se coupent au centre, et de plus elles font les mêmes angles que les premières avec l'axe des abscisses, puisque les coefficiens de x ne diffèrent pas : donc les deux systèmes se réduisent à un seul.

56. Qu'on suppose maintenant dans l'équation générale

$$A=0,\ D=0,$$

et on trouve ces équations aux asymptotes

$$x = 0,\ y = -\frac{Cx}{B} - \frac{E}{B};$$

l'une d'elles est donc l'axe des y, et on conclurait généralement que, lorsque le carré y^2 manque, l'une des asymptotes est parallèle aux y.

57. Donc *si les carrés* x^2 *et* y^2 *viennent à manquer, des deux asymptotes, l'une est parallèle à l'axe des* x, *et l'autre à celui des* y.

Et enfin, *si les carrés et les premières puissances des variables manquent en même temps, les axes sont asymptotes de l'hyperbole.*

Dans ces deux derniers cas, on n'a plus de diamètres donnés par la formule des racines, soit en y soit en x, et lorsque l'équation est ainsi réduite à

$$Bxy + F = 0,$$

elle n'a plus d'intersections avec ses axes. Si de plus $F = 0$, on a les axes.

58. Lorsque $B = 0$ et $A = -C$, l'hyperbole est *équilatère* (49), et l'équation aux asymptotes devient

$$y = \pm x - \frac{D \pm E}{2A};$$

comme les tangentes des angles faits par ces lignes avec l'axe des x, satisfont à la relation

$$aa' + 1 = 0,$$

on conclut que, pour cette particularité de l'hyperbole, les asymptotes sont à angle droit.

59. On a déjà vu (47) que sous la condition

$$\frac{(BD - 2AE)^2}{(B^2 - 4AC)^2} = \frac{D^2 - 4AF}{B^2 - 4AC}$$

l'équation de l'hyperbole se changeait dans celles de deux droites, c'est-à-dire, qu'elle devenait décomposable en deux facteurs rationnels en x; reportant cette valeur de $\frac{D^2-4AF}{B^2-4AC}$ dans la formule générale des racines y, le trinôme sous le radical, devient un carré parfait, et on obtient

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{\left\{(B^2-4AC)\left(x+\frac{BD-2AE}{B^2-4AC}\right)^2\right\}},$$

ou

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\left\{x\sqrt{B^2-4AC}+\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}\right\}.$$

Ces droites sont donc les asymptotes elles-mêmes : on observera encore que, dans le même cas, les abscisses des intersections de l'hyperbole avec son diamètre, deviennent égales entre elles et à l'abscisse du centre; ensorte que si l'on suppose que ces intersections se soient rapprochées par degrés, c'est au moment de leur coincidence, que s'opère le changement de l'hyperbole en deux droites,

60. Les dégénérations de l'hyperbole sont donc l'hyperbole équilatère, et le système de deux droites toujours réelles, et qui se coupent.

61. Construisons pour exemple la courbe de l'équation

$$y^2-x^2+my-nx=0,$$

dans laquelle nous supposerons d'abord $m>n$. En la résolvant par rapport à y, on trouve Fig. 54.

$$y=\frac{-m\pm\sqrt{4x^2+4nx+m^2}}{2};$$

équation à une hyperbole, puisque le coefficient de x^2 est po-

sitif. L'équation de son diamètre FH est

$$y = -\frac{m}{2} = AR:$$

ce diamètre est donc parallèle à l'axe des abscisses : les intersections de la courbe avec ce diamètre, ont pour abscisses les racines de

$$4x^2 + 4nx + m^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - m^2}}{2};$$

or comme elles sont imaginaires, il faut conclure que la courbe ne rencontre pas le diamètre FH. Résolvant l'équation par rapport à x, on trouve

$$x = \frac{-n \pm \sqrt{4y^2 + 4my + n^2}}{2};$$

le second diamètre $F'H'$ a donc pour abscisse

$$x = -\frac{n}{2} = AR',$$

et il est parallèle à l'axe AY. Les racines du trinôme sous le radical égalé à zéro, sont

$$y = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - n^2}}{2};$$

prenant donc $AR = -\frac{m}{2}$, et augmentant, et diminuant cette longueur de $\frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{2}$, ce qui donne B' et B, puis menant les parallèles $B'a'$, Ba à l'axe AX, on aura les intersections a', a de la courbe avec $F'H'$. Le centre est en C inter-

section des deux diamètres. Pour avoir les points de rencontre, 1°. avec l'axe AX, on fera $y = 0$, d'où résulteut

$$x = 0,\ x = -n = AA',$$

2°. avec l'axe AY, on posera $x = 0$, valeur à laquelle correspondent

$$y = 0,\ y = -m = AD.$$

Passons à la détermination des asymptotes : si l'on compare la proposée avec l'équation générale, on trouve

$$A = 1,\ B = 0,\ C = -1,\ D = m,\ E = -n,\ F = 0;$$

et de là,

$$B^2 - 4AC = 4 = a,\ 2(BD - 2AE) = 4n = b,\ D^2 - 4AF = m^2 = c,$$

et conséquemment, cette équation des asymptotes,

$$y = -\frac{m}{2} \pm \tfrac{1}{2}(2x + n),$$

qui indique deux lignes situées symétriquemnet l'une au-dessus, l'autre au-dessous du diamètre FH qu'elles coupent au point

$$x = -\frac{n}{2},$$

c'est-à-dire, au centre. Si l'on veut avoir les intersections de ces droites 1°. avec l'axe des y, il faut faire $x = 0$, ce qui donne

$$y = \frac{-m + n}{2};$$

2°. avec celui des x, on écrira $y = 0$, d'où

$$x = \frac{-n \pm m}{2},$$

valeurs qui servent à construire et à vérifier la position des asymptotes.

L'hyperbole en question est *équilatère*, et ses asymptotes sont à angle droit.

Lorsque $m = n$, on trouve

$$y = \frac{-m \pm (2x + m)}{2} :$$

la courbe dégénère donc alors en deux droites qui ont même formule que les asymptotes.

Enfin, pour $m < n$, la courbe rencontre le diamètre FH, et ses intersections avec $F'H'$ sont imaginaires.

Nous donnerons un exemple relatif au cas précédemment observé, dans lequel l'hyperbole ne rencontre aucun de ses deux diamètres, et à cet effet, nous avons choisi l'équation

$$y^2 + 3xy + x^2 + y + x = 0;$$

on en déduit

$$y = -\frac{3x + 1}{2} \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{\{5x^2 + 2x + 1\}},$$

$$x = -\frac{3y + 1}{2} \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{\{5y^2 + 2y + 1\}};$$

Fig. 55. et comme les abscisses des intersections de la courbe avec le diamètre FH, c'est-à-dire, les racines de l'équation

$$5x^2 + 2x + 1 = 0$$

sont imaginaires, et que d'ailleurs A et C ont même signe, on est assuré que les abscisses y des intersections aveo le diamètre $F'H'$, sont pareillement imaginaires (48); ensorte que la courbe ne rencontre ni l'un ni l'autre de ces diamètres. A $x = 0$ correspondent

$$y = 0, \; y = -1 = AR',$$

et pour $y = 0$, on trouve

$$x = 0, \quad x = -1 = AR;$$

et comme une des branches doit être toute entière au-dessus des deux diamètres, et l'autre au-dessous, la courbe est située comme le montre la figure. L'équation des asymptotes est

$$y = -\frac{3x+1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{5} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right);$$

d'où on conclut cette valeur de l'abscisse du centre, $x = -\frac{1}{10}$.

62. La parabole et l'hyperbole ne dégénèrent en droites, que parce que les équations données sont déjà, ou deviennent, dans les hypothèses qu'on a faites sur les constantes, décomposables en deux facteurs rationnels en x; d'où il suit que si on prend de tels facteurs, et qu'on les multiplie entre eux, le produit égalé à zéro, représentera le système de deux ou de plusieurs droites; et comme il peut arriver que, pour un tel produit, l'une ou l'autre de ces deux relations $B^2 - 4AC = 0$, ou > 0, se trouve satisfaite, on ne peut réciproquement conclure l'existence de l'une de ces deux courbes de la caractéristique qui l'annonce. On observera aussi que lorsque la parabole est indéfinie, dans un sens seulement, les deux droites le sont dans les deux sens, ce qui établit une différence essentielle, quoique, à d'autres égards, il soit vrai de dire que les droites conservent quelques traits de la courbe correspondante, ainsi qu'on aura pu le remarquer dans cette discussion.

CHAPITRE VIII.

Réduction de l'équation générale à l'une ou à l'autre de ces formes,

$$My^2 + Nx^2 + P = 0, \quad My^2 + Nx^2 + Px = 0;$$

c'est-à-dire, des courbes du premier degré au centre ou au sommet, et à des axes rectangulaires.

63. On a déjà reconnu (ch. VI.) que l'ellipse et l'hyperbole, rapportées au centre et à des axes rectangulaires et symétriques, ont une équation de la forme

$$My''^2 + Nx''^2 + P = 0,$$

et que les trois sections coniques rapportées au sommet et à des axes rectangulaires, et dont l'un, celui des x'' est symétrique dans la section, sont représentées par

$$My''^2 + Nx''^2 + Px'' = 0;$$

et il serait facile de démontrer réciproquement que la première de ces équations donne l'origine *au centre*, et qu'elle suppose la courbe rapportée à des axes placés symétriquement : car, pour $x''=0$, on a $y''=\pm\sqrt{\frac{-P}{M}}$, et, pour $y''=0$, on a $x''=\pm\sqrt{\frac{-P}{N}}$: de plus, à toute abscisse x'', correspondent deux valeurs égales de y'', lesquelles ne diffèrent que par le signe, et pareillement à une valeur quelconque donnée à y'',

répondent deux ordonnées x'' égales et de différens signes. De la seconde on déduit $y''=0$ pour $x''=0$; donc à l'origine, l'axe des y'' ne fait que toucher la courbe; d'ailleurs, pour chaque abscisse x'', on trouve deux valeurs de y'' égales et seulement différentes par le signe : l'origine est donc le *sommet* (30), puisque c'est le point de rencontre de la courbe par un axe qui divise également les transversales qui lui sont perpendiculaires.

64. Reprenons l'équation générale à six termes,

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0\ldots(1);$$

si on voulait en même temps déplacer l'origine et changer la direction des axes, il faudrait, en supposant que les nouveaux axes dussent être encore rectangulaires, employer ces deux formules démontrées (27)

$$y=b+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,\quad x=a+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha;$$

qui renferment trois indéterminées, α, a et b, et on disposerait de ces quantités de manière à faire disparaître trois des six termes. Cependant on pourra décomposer cette substitution, en écrivant d'abord

$$(2)\ldots y=b+y',\ x=a+x'\ldots(3),$$

puis

$$(4)\ldots y'=x''\sin\alpha+y''\cos\alpha,\ x'=x''\cos\alpha-y''\sin\alpha\ldots(5).$$

Nous ferons voir plus loin, que l'ordre dans lequel on introduit ces deux parties des valeurs de y et de x, n'est pas indifférent.

Si l'on pose, pour abréger,

$$(6)\ldots,\ 2Ab+Ba+D=D',\ 2Ca+Bb+E=E'\ldots(7),$$
$$Ab^2+Bab+Ca^2+Db+Ea+F=F'\ldots(8),$$

on trouvera pour première transformée,

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+D'y'+E'x'+F'=0\ldots(9),$$

dans laquelle les coefficiens A, B et C sont les mêmes que dans la proposée : remplaçons maintenant y' et x', et nous trouverons la seconde transformée

$$\left.\begin{array}{l}(A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)\,y''^2 \\ +\{2A\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2C\sin\alpha\cos\alpha\}\,x''y'' \\ +(A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)\,x''^2 \\ +(D'\cos\alpha - E'\sin\alpha)y'' + (D'\sin\alpha + E'\cos\alpha)x'' + F'\end{array}\right\} = 0. \quad (10)$$

dans laquelle le terme F' est resté le même que dans la précédente.

Puisque le terme du rectangle xy ne doit pas se trouver dans les réduites, on a donc cette première équation de condition

$$2A\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0 \ldots (11);$$

mais on sait que

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

ainsi la condition (11) peut être abrégée ainsi :

$$(A - C)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0,$$

et on en tire

$$\text{tang}\, 2\alpha = -\frac{B}{A - C};$$

Cette tangente sera toujours réelle, puisqu'elle est donnée par une équation du premier degré ; conséquemment l'évanouissement du terme du rectangle, est toujours possible. Cherchons à traduire les coefficiens de y'' et de x'' en A, B et C.

Si l'on pose

$$M = A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha$$
$$N = A\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha,$$

puisqu'on ajoute et qu'on retranche successivement ces deux

égalités, on aura

$$(12)..M+N=A+C,\quad M-N=\sqrt{\{A^2+B^2+C^2-2AC\}}...(13),$$

en observant que

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tang^2 2\alpha}}=\frac{A-C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2-2AC}},$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha=\frac{\tang 2\alpha}{\sqrt{1+\tang^2 2\alpha}}=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2-2AC}}.$$

Si l'on forme le carré de $M+N$, puis celui de $M-N$, et qu'on les retranche l'un de l'autre, on parvient à

$$-4MN=B^2-4AC\ldots,.(14).$$

Les formules (12) et (13) donnent ces valeurs de M et de N,

$$M=\tfrac{1}{2}\left\{A+C+\sqrt{B^2+(A-C)^2}\right\}.....(15)$$
$$N=\tfrac{1}{2}\left\{A+C-\sqrt{B^2+(A-C)^2}\right\}.....(16),$$

lesquelles sont toujours réelles, ce qu'il est nécessaire d'observer. Sous ces déterminations, la transformée (10) est réduite à

$$(17).....My''^2+Nx''^2+(D'\cos\alpha-E'\sin\alpha)\,y''+(D'\sin\alpha+E'\cos\alpha)\,x''+F'=0;$$

et on la ramènera à la forme

$$My''^2+Nx''^2+P=0\ldots(18).$$

en posant

$$(19)\ldots D'\cos\alpha-E'\sin\alpha=0,\quad D'\sin\alpha+E'\cos\alpha=0\ldots(20).$$

Connaissant $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ en nombres, on n'aura plus à évaluer que les coordonnées a et b du centre, d'après les deux relations précédentes. Mais si l'on multiplie la première par $\cos\alpha$, et la seconde par $\sin\alpha$, on obtiendra les suivantes,

$$D'\cos^2\alpha-E'\sin\alpha\cos\alpha=0,$$
$$D'\sin^2\alpha+E'\sin\alpha\cos\alpha=0,$$

lesquelles ajoutées donnent

$$D' = 0, \text{ donc } E' = 0;$$

ensorte que les coordonnées du centre seront fournies par les équations (6) et (7), et on trouvera ces valeurs

$$a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}; \; b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC};$$

déjà obtenues (32). On pourrait donc effectuer d'abord le déplacement de l'origine, en employant les substitutions (2) et (3), et égalant à zéro les coefficiens D', E' dans la première transformée (9), puis ensuite changer autour de la nouvelle origine, la direction des axes, en faisant les substitutions (4) et (5) dans l'équation simplifiée.

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + F' = 0,$$

ce qui ramène à celle-ci,

$$(A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)y''^2$$
$$+\{2A\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2C\sin\alpha\cos\alpha\}x''y''$$
$$+(A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)x''^2 + F' = 0,$$

et déterminant α sous la condition que le terme du rectangle disparaisse. Telle est la marche que nous suivrons dans les applications de ces formules, et il est essentiel d'observer que les résultats seraient différens et inexacts, généralement parlant, si, commençant par l'introduction des formules (4) et (5), on faisait disparaître le rectangle dans cette première transformée, et qu'ensuite on remplaçât y' et x' par $b + y''$ et $a + x''$, puisqu'alors la dernière transformée aurait de moins quelques termes des premières puissances de y'' et x''.

Pour la réduction au sommet, on posera dans (10) les deux conditions,

$$D'\cos\alpha - E'\sin\alpha = 0 \ldots\ldots (21),$$
$$Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F = F' = 0 \ldots (22),$$

puisqu'alors l'équation résultante est effectivement

$$My''^2 + Nx''^2 + Px'' = 0 \ldots\ldots (23),$$

en tenant compte de la condition (11) sous laquelle le rectangle disparaît. L'équation (22) indiquant la même relation entre les coordonnées a et b de la nouvelle origine, qu'entre les coordonnées générales x, y de tous les points de la courbe, démontre que l'origine est l'un de ces points, et la forme de la résultante prouve (63) que l'axe des x'' est un axe principal dans la courbe.

Les formules (15) et (16) peuvent se traduire ainsi,

$$M = \tfrac{1}{2}\{A + C + \sqrt{B^2 - 4AC + (A+C)^2}\} \ldots\ldots (24),$$
$$N = \tfrac{1}{2}\{A + C - \sqrt{B^2 - 4AC + (A+C)^2}\} \ldots\ldots (25).$$

Pour $B^2 - 4AC = 0$, on a $N = 0$, de sorte que l'équation (18) ne renferme plus qu'une variable, d'où on conclut que, sous ce caractère, cette transformation est impossible; de plus, l'équation (23) devient

$$My''^2 + Px'' = 0,$$

qui est celle d'une parabole. De la relation (14) on déduit que pour $B^2 - 4AC < 0$, les coefficiens M et N ont même signe, et qu'ils prennent des signes différens pour $B^2 - 4AC > 0$, conclusions déjà obtenues à l'égard de l'ellipse et de l'hyperbole, et desquelles on pourrait réciproquement conclure $B^2 - 4AC < 0$, > 0, comme caractères de ces courbes.

Pour la détermination des coordonnées a et b du sommet, on mettra l'équation (21) sous la forme

$$2D' \sin\alpha\cos\alpha - 2E' \sin^2\alpha = 0,$$

ou

$$D' \sin 2\alpha - E'(1 - \cos 2\alpha) = 0;$$

et remplaçant $\sin 2\alpha$ et $\cos 2\alpha$ par leurs valeurs trouvées plus

haut, on aura

$$BD' - E'\left\{A - C - \sqrt{B^2 + (A-C)^2}\right\} = 0;$$

ou bien encore

$$BD' - E'\left\{A - C - \sqrt{(B^2 - 4AC) + (A+C)^2}\right\} = 0,$$

qu'on combinera avec

$$Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F = 0.$$

Pour la parabole, la première de ces équations se réduit à

$$BD' + 2CE' = 0,$$

et cette courbe est la seule pour laquelle on soit obligé de transporter l'origine au sommet; quant à l'ellipse et à l'hyperbole, il sera généralement plus expéditif de rechercher les équations au centre et aux axes principaux, parce qu'il est ensuite très-facile d'en déduire celles des mêmes courbes pour le sommet. A cet effet, on posera

$$x'' = A - x''';$$

A représentant le demi grand axe, et x''' l'abscisse comptée du sommet sur cet axe : cette substitution faite dans l'équation

$$My''^2 + Nx''^2 + P = 0,$$

la change dans celle-ci,

$$My''^2 + Nx'''^2 - 2NAx''' + NA^2 + P = 0:$$

or l'hypothèse $y'' = 0$ dans l'équation précédente, donne

$$x''' = A = \sqrt{\frac{-P}{N}}, \text{ d'où } A^2 = -\frac{P}{N};$$

conséquemment la transformée devient par cette substitution

de A'',

$$My''^2 + Nx''^2 - 2NAx'' = 0;$$

et elle est de même forme que l'équation (23).

Lorsqu'on veut rapporter une courbe à son sommet pris pour origine, et à ses axes, on peut faire la totalité des substitutions en deux fois, c'est-à-dire commencer par celles-ci,

$$y = b + y', \; x = a + x',$$

et passer de là à la seconde transformée, par

$$y' = x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha, \quad x' = x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha;$$

mais on aura soin de ne faire disparaître les trois termes que dans ce dernier résultat.

65. Les exemples suivans jetteront le plus grand jour sur cette analyse des transformations et les élèves verront plus clairement dans ces applications, que dans une discussion très-étendue, la marche à suivre pour les effectuer, et les conséquences à tirer de la forme des résultats auxquels on est conduit pour les déterminations tant de l'angle α que des coordonnées a et b, soit du centre, soit du sommet de la courbe.

Prenons pour premier exemple l'équation

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2x = 0:$$

si on remplace y et x par

$$y = b + y', \; x = a + x',$$

on aura cette première transformée,

$$y'^2 - 2x'y' + 2x'^2 + 2(b - a)y' + 2(2a - b - 1)x' + b^2 - 2ab + 2a^2 - 2a = 0:$$

l'égalité à zéro les coefficiens y' et de x', donnera ces deux équations,

$$b - a = 0, \; 2a - b - 1 = 0,$$

desquelles on déduit pour les coordonnées du centre, ainsi que nous l'avons fait voir dans la théorie générale,

$$a = 1, \quad b = 1.$$

Employons maintenant les formules

$$y' = x'' \sin\alpha + y'' \cos\alpha, \quad x' = x'' \cos\alpha - y'' \sin\alpha,$$

leur substitution dans l'équation précédente qui est réduite à

$$y'^2 - 2x'y' + 2x'^2 - 1 = 0,$$

par les valeurs de a et b, donnera

$$\begin{aligned}&(\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha)y''^2\\ &+(-2\sin\alpha\cos\alpha + 2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha))x''y''\\ &+(\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha)x''^2 - 1 = 0;\end{aligned}$$

l'évanouissement du rectangle a lieu sous la condition

$$-2\sin\alpha\cos\alpha + 2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = 0,$$

qui devient

$$-\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = 0, \text{ d'où } \operatorname{tang} 2\alpha = -2;$$

d'ailleurs

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tang} 2\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 2\alpha}}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 2\alpha}}$$

Et si l'on observe que tang 2α étant négative, l'angle 2α est obtus, qu'ainsi cos 2α est négatif, et que sin 2α est positif, on trouvera

$$\sin 2\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

ces substitutions faites dans les coefficiens de y''^2 et de x''^2, on a pour équation de la courbe rapportée au centre et aux axes,

$$(3+\sqrt{5})\,y''^2+(3-\sqrt{5})\,x''^2-2=0.$$

Pour rapporter la même courbe au sommet, on cherchera d'abord le demi grand axe, c'est-à-dire, la valeur de x'', correspondante à $y''=0$, laquelle est

$$x''=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}};$$

puis on établira la relation

$$x''=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}-x''',$$

x''' étant l'abscisse comptée du sommet : cette valeur portée en place de x'', donnera l'équation cherchée. A cette occasion, nous observerons de nouveau, que lorsqu'on aura à rapporter, soit une ellipse, soit une hyperbole, au sommet et à ses axes, il sera plus expéditif de la rappeler au centre et aux axes, et ensuite de transporter, comme nous venons de le faire, l'origine du centre au sommet, c'est-à-dire, à l'une des extrémités du grand axe.

Supposons pour équation

$$y^2-2xy+2x^2+1=0,$$

auquel cas la courbe est imaginaire : on trouvera pour première transformée due aux substitutions

$$y=b+y',\ x=a+x'$$

celle-ci

$$y'^2-2x'y'+2x'^2+2(b-a)\,y'+2(-b+2a)\,x'+b^2-2ab+2a^2+1=0:$$

et de l'égalité à zéro des coefficiens de y' et de x', on déduit

$$a=0,\ b=0,$$

résultats qui apprennent que déjà la courbe est rapportée à son centre, ce qu'on aurait pu voir à l'inspection de la proposée qui est telle que, pour $x = 0$, les deux valeurs de y sont égales et de signes contraires, et qu'à $y = 0$, répondent aussi deux valeurs pareilles de x. Par ces valeurs de a et b, la transformée devient

$$y'^2 - 2x'y' + 2x' + 1 = 0,$$

la même que la proposée : on procédera donc au changement de direction des axes, par les substitutions

$$y' = x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha, \quad x' = x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha$$

qui donneront

$$\begin{aligned}&(\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin^2 \alpha) y''^2 \\ &+ (-2 \sin \alpha \cos \alpha - 2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)) x''y'' \\ &+ (\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha) x''^2 + 1 = 0 :\end{aligned}$$

il faudra poser

$$2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\sin 2\alpha + 2 \cos 2\alpha = 0, \text{ ou } \operatorname{tang} 2\alpha = -2,$$

l'équation réduite étant la même que la précédente, quant aux coefficiens de y''^2 et de x''^2, on trouvera pour résultat

$$(3 + \sqrt{5}) y''^2 + (3 - \sqrt{5}) x''^2 + 2 = 0 :$$

et comme le premier membre est la somme de trois termes positifs, on conclura que la courbe est impossible.

Soit l'équation d'une ellipse qui se réduit à un point

$$y^2 + xy + x^2 = 0 :$$

les coordonnées du centre sont encore $a = 0$, $b = 0$, en-

sorte qu'on a, pour la première transformée

$$y'^2 + x'y' + x'^2 = 0,$$

et pour la seconde

$$(\cos^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha)\,y''^2 + (-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\,x''y'' + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)\,x''^2 = 0,$$

l'évanouissement du terme du rectangle, donne

$\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$, d'où $\cos\alpha = \sin\alpha$, et $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

ces valeurs portées dans la dernière transformée, la réduisent à

$$y''^2 + 3x''^2 = 0,$$

équation qui ne peut être satisfaite que par $x'' = 0$, $y'' = 0$, coordonnées d'un point qui est et l'ancienne origine et le centre. On reconnaît donc que l'ellipse annoncée par l'équation, n'est qu'un point.

Soit l'équation

$$y^2 - 2xy + x^2 - x = 0,$$

qu'on sait être celle d'une parabole : on posera les formules

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b,\quad x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a;$$

et on trouvera pour résultat de la substitution dans la proposée

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 y'^2 + 2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)\,x'y' + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 x'^2 + \{2(b-a)(\sin\alpha + \cos\alpha) + \sin\alpha\}y' + \{2(b-a)(\sin\alpha - \cos\alpha) - \cos\alpha\}x' + (b-a)^2 - a = 0$$

L'anéantissement du terme du rectangle donne

$$\sin^2\alpha = \cos^2\alpha, \text{ donc } \sin\alpha = \cos\alpha,$$

et conséquemment

$$\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

ensorte que la transformée devient

$$2y'^2 + \left\{2(b-a)\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}x' + (b-a)^2 - a = 0;$$

nous poserons donc

$$2(b-a)\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0, \quad (b-a)^2 - a = 0,$$

ou

$$4(b-a) + 1 = 0, \quad (b-a)^2 - a = 0;$$

équations qui donnent

$$b = -\tfrac{3}{16}, \quad a = \tfrac{1}{16}.$$

Ainsi la parabole aura pour sommet le point dont les coordonnées sont $-\frac{3}{16}$, $+\frac{1}{16}$; son diamètre, ou axe principal, coupera l'axe primitif des x sous un angle de 50°, et son équation sera

$$y^2 = \frac{1}{\sqrt{8}}x.$$

L'équation

$$y^2 - 2xy + x^2 - 1 = 0,$$

que nous avons déjà reconnue (45) être celle de deux droites parallèles, donne la transformée

$$(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 y'^2 - 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)x'y' + (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 x'^2$$
$$+ 2(b-a)(\sin\alpha + \cos\alpha)y' + 2(b-a)(\sin\alpha - \cos\alpha)x'$$
$$+ (b-a)^2 - 1 = 0.$$

La disparition du rectangle conduit à

$$\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ d'où } \alpha = 50°;$$

par ces valeurs l'équation précédente se réduit à

$$2y'^2 + 2\sqrt{2}(b-a)y' + (b-a)^2 - 1 = 0,$$

qui ne renferme plus qu'une des deux variables. Pour déterminer les coordonnées du centre, il faudrait poser

$$b-a=0,\ (b-a)^2-1=0:$$

et comme ces équations sont en contradiction, les coordonnées a et b sont infinies, et de là on infère que la parabole dégénère en deux droites.

Pour l'équation

$$y^2 - 2xy + x^2 = 0,$$

l'évanouissement du terme du rectangle donnerait toujours

$$\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

et on aura, pour déterminer les coordonnées a et b du sommet,

$$a-b=0,\ (a-b)^2=0.$$

De ce que a et b sont des quantités indéterminées, on doit conclure que la proposée représente une ligne droite.

Enfin, que l'équation à traiter soit

$$y^2 - 2xy + x^2 + 1 = 0,$$

qu'on sait appartenir à deux droites imaginaires : on trouvera toujours

$$\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

l'angle α est donc réel; mais les équations entre les coordonnées du sommet, étant

$$b-a=0,\ (b-a)^2+1=0,$$

dont la seconde est la somme de deux carrés, on voit qu'il est impossible d'assigner a et b.

Passons à l'hyperbole, et prenons l'équation

$$y^2 - 2xy - x^2 - y + x + 1 = 0;$$

les coordonnées a et b du centre sont

$$a = 0,\ b = \tfrac{1}{2};$$

elles réduisent l'équation à la suivante,

$$y'^2 - 2x'y' - x'^2 + \tfrac{3}{4} = 0:$$

l'emploi des formules au moyen desquelles on change la direction des axes autour de la nouvelle origine, donne, après avoir posé le coefficient du rectangle égal à zéro, c'est-à-dire,

$$2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0,$$

cette réduite,

$$(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)y''^2 - (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)x''^2 + \tfrac{3}{4} = 0;$$

on a donc

$$\sin 2\alpha = \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

et conséquemment la transformée en nombres

$$y''^2 - x''^2 = -\frac{3}{4\sqrt{2}},$$

équation d'une hyperbole équilatère.

Prenons pour autre exemple l'équation

$$y^2 - 2xy - y = 0,$$

qui est celle d'une hyperbole qui dégénère en deux droites :

on trouvera pour les coordonnées du centre, $b=0, a=-\frac{1}{2}$; la seconde transformée est

$$(\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha)\,y''^2 + (\sin^2\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha)\,x''^2 = 0,$$

sous la condition

$$2\sin\alpha\cos\alpha - 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0,$$

de laquelle on déduit tang $2\alpha = 2$, et conséquemment

$$(1+\sqrt{5})\,y''^2 - (-1+\sqrt{5})\,x''^2 = 0,$$

laquelle donne

$$y'' = \pm\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{3}\right)x''. \qquad \text{Fig. 56.}$$

66. Ceux des lecteurs qui auront passé le chapitre VI, trouveront ici toutes les conclusions qui le terminent, c'est-à-dire, les formes des équations des courbes du premier ordre, rapportées au centre et aux axes symétriques, ainsi qu'au sommet et à deux axes, l'un symétrique, et l'autre tangent.

L'équation (18), savoir

$$My^2 + Nx^2 + P = 0 \ldots\ldots (R)$$

peut être mise sous la forme

$$\frac{P}{N}y^2 + \frac{P}{M}x^2 + \frac{P^2}{MN} = 0 \ldots\ldots (S)$$

Or de la formule trouvée (64),

$$-4MN = B^2 - 4AC,$$

on conclut le produit MN positif pour l'ellipse, et négatif pour l'hyperbole. Mais l'équation (R) donne,

$$\left.\begin{array}{l} \text{pour } y=0,\ x^2 = -\dfrac{P}{N} = A^2 \\ \text{pour } x=0,\ y^2 = -\dfrac{P}{M} = B^2 \end{array}\right\} \text{ donc } A^2B^2 = \frac{P^2}{MN} \ldots (T)$$

ensorte que pour l'ellipse, en tant qu'elle est réelle, les demi-axes A et B sont réels; et, pour l'hyperbole, l'un d'eux est imaginaire, puisqu'on a, pour cette courbe, $A^2B^2 < 0$; nous supposerons que ce soit le demi-axe B qui alors sera nécessairement de la forme $B\sqrt{-1}$, puisque son carré doit être négatif. Reportant dans (S) les valeurs des coefficiens en A^2 et B^2, c'est-à-dire, en carrés des demi-axes, on a, pour l'ellipse,

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2 \ldots\ldots (U)$$

et pour l'hyperbole, après avoir changé les signes,

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2 \ldots\ldots (V)$$

Pour A imaginaire, ou de la forme $A\sqrt{-1}$, ce serait

$$A^2y^2 - B^2x^2 = A^2B^2 \ldots\ldots (X)$$

La première de ces deux équations de l'hyperbole se rapporte au cas où la courbe coupe l'axe symétrique des x, et la seconde à celui où elle coupe l'axe symétrique des y, qui devient alors celui des abscisses.

Les sommets de la courbe étant les points A et A' dans lesquels elle coupe l'axe symétrique des abscisses, on transportera l'origine en l'un de ces points, en A', par la substitution $CP = A'P - A'C$, ou $x = x' - A$, C étant le centre: par là les équations (U) et (V) se changent dans les suivantes:

Fig. 44, 45.

$$A^2y^2 + B^2x'^2 = \quad 2AB^2x \ldots\ldots (Y)$$
$$A^2y^2 - B^2x'^2 = -2AB^2x \ldots\ldots (Z)$$

et alors l'axe des y est tangent à la courbe, à l'origine.

L'équation de la parabole rapportée au sommet, a été trouvée (64)

$$y^2 = -\frac{P}{M}x^2 \text{ ou } y^2 = 2px.$$

CHAPITRE IX.

Des Diamètres conjugués.

67. Les axes principaux ne sont pas les seules lignes qui, dans l'ellipse et l'hyperbole, se trouvent divisées en deux parties égales au centre : toute ligne menée par ce point, et terminée de part et d'autre à la courbe, est divisée de la même manière, et prend le nom de *diamètre* (35). En effet, l'équation d'une droite menée par le centre pris pour origine des coordonnées, est

$$y = ax :$$

combinant cette équation avec celle de l'ellipse

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,$$

on obtient ces coordonnées des intersections,

$$x = \pm \frac{AB}{\sqrt{A^2a^2 + B^2}}, \; y = \pm \frac{aAB}{\sqrt{A^2a^2 + B^2}} :$$

donc les deux portions de la droite sont hypothénuses dans deux triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont égaux ; ces hypothénuses sont donc égales. La propriété a pareillement lieu dans l'hyperbole ; mais pour cette courbe, on trouve

$$x = \pm \frac{AB}{\sqrt{B^2 - A^2a^2}}, \; y = \pm \frac{aAB}{\sqrt{B^2 - A^2a^2}} ;$$

ensorte que les diamètres ne sont réels que depuis $a = 0$ jusqu'à $a = \pm\frac{B}{A}$, inclinaison sous laquelle ils deviennent infinis, et se changent en *asymptotes* (50).

68. Nous nous proposons ici de rechercher s'il n'existe pas des systèmes de diamètres par rapport auxquels les équations des sections coniques conservent la forme qu'elles ont par rapport aux axes principaux et au centre, s'il s'agit de l'ellipse et de l'hyperbole, et au sommet et à l'axe principal, s'il s'agit de la parabole.

69. Comme par rapport à l'ellipse et à l'hyperbole, on retient l'origine au centre, la question se réduit à passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques, et parce que la transformée doit conserver la forme de la proposée, on pourra composer à part le coefficient du rectangle et l'égaler à zéro. Les formules à employer sont (27)

$$y = x' \sin \alpha + y' \sin \alpha' \,, \quad x = x' \cos \alpha + y' \cos \alpha' :$$

le terme en $x'y'$ donné en partie par y^2, en partie par x^2, a pour coefficient qu'il faut égaler à zéro,

$$A^2 \sin \alpha \sin \alpha' + B^2 \cos \alpha \cos \alpha' = 0,$$

d'où résulte

$$\text{tang}\, \alpha \,\text{tang}\, \alpha' = -\frac{B^2}{A^2} \ldots\ldots (1);$$

des deux angles α, α', l'un est donc aigu et l'autre obtus. La transformée est réduite à

$$(A^2 \sin^2 \alpha' + B^2 \cos^2 \alpha') y'^2 + (A^2 \sin^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha) x'^2 = A^2 B^2 \ldots (2).$$

Si dans cette équation, on fait successivement $y' = 0$, $x' = 0$, on aura les distances du centre aux points d'intersection de la courbe avec les diamètres auxquels elle se trouve rapportée. Soient A', B' ces demi-diamètres, le premier étant compté sur

l'axe des x', et le second sur celui des y' : on trouve

$$(3)\ldots A'^2=\frac{A^2B^2}{A^2\sin^2\alpha+B^2\cos^2\alpha},\ B'^2=\frac{A^2B^2}{A^2\sin^2\alpha'+B^2\cos^2\alpha'}\ldots(4),$$

et l'équation de la courbe devient

$$A'^2y'^2+B'^2x'^2=A'^2B'^2\ldots\ldots(5)$$

$2A'$, $2B'$ sont nommés *diamètres conjugues ;* ils font système comme les axes.

L'équation (1) faisant dépendre tang α de tang α', et réciproquement, il faudra se donner l'un de ces angles pour avoir l'autre : on conclut de là une infinité d'angles α, α', et conséquemment une infinité de systèmes de diamètres conjugués pour chacun desquels l'équation (5) a toujours lieu. De plus, ces diamètres $2A'$, $2B'$ sont toujours réels, ainsi qu'on le déduit des expressions (3) et (4).

Prenons α pour l'angle que fait le diamètre $2A'$ avec le grand axe ; l'hypothèse $\alpha=0$ donne

$$\text{tang}\,\alpha'=-\frac{B^2}{0}=\infty\,;$$

donc $\alpha'=100°$; ainsi l'autre diamètre $2B'$ se confond avec le le second axe : le système d'axes rectangulaires n'est donc qu'un cas particulier des systèmes de diamètres conjugués. Pour $A=B$, on a

$$\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha'=-1\,,$$

ce qui apprend (16, probl. 4) que, dans le cercle, tous les diamètres conjugués sont à angle droit : d'ailleurs, les équations (3) et (4) donnent

$$A'^2=\frac{A^2}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=A^2,\ B'^2=\frac{A^2}{\sin^2\alpha'+\cos^2\alpha'}=A^2\,;$$

donc encore tous les diamètres conjugués sont égaux.

Si maintenant on repasse des axes obliques $2A'$, $2B'$, à des axes rectangulaires, on aura, pour la même courbe, deux équations identiques, propres à faire découvrir quelques relations entre les diamètres conjugués et les axes de l'ellipse. A cet effet, on fera dans (5) les substitutions

$$y' = \frac{y\cos\alpha - x\sin\alpha}{\sin(\alpha'-\alpha)},\quad x' = \frac{x\sin\alpha' - y\cos\alpha'}{\sin(\alpha'-\alpha)},$$

démontrées (27) ; l'équation résultante sera

$$(A'^2\cos^2\alpha + B'^2\cos^2\alpha')y^2 + (-2A'^2\sin\alpha\cos\alpha - 2B'^2\sin\alpha'\cos\alpha')xy$$
$$+ (A'^2\sin^2\alpha + B'^2\sin^2\alpha')x^2 = A'^2B'^2\sin^2(\alpha'-\alpha) = 0 \ldots (6) ;$$

et comme elle doit être identique avec celle de l'ellipse rapportée au centre et aux axes, on aura ces relations

$$A^2 = A'^2\cos^2\alpha + B'^2\cos^2\alpha' \ldots\ldots (7)$$
$$B^2 = A'^2\sin^2\alpha + B'^2\sin^2\alpha' \ldots\ldots (8)$$
$$A^2B^2 = A'^2B'^2\sin^2(\alpha'-\alpha) \ldots\ldots (9) :$$

les deux premières ajoutées donnent cette propriété,

$$A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2 \ldots\ldots\ldots (10),$$

et de la troisième on déduit

$$AB = A'B'\sin(\alpha'-\alpha) \ldots\ldots (11).$$

70. *La somme des carrés des demi-axes est donc égale à celle des carrés des demi-diamètres ; et le rectangle des premiers est égal au parallelogramme des seconds*, en observant que $\alpha'-\alpha$ est l'angle compris entre B' et A' ; qu'ainsi $B'\sin(\alpha'-\alpha)$ est la hauteur du parallélogramme, lorsque le demi-diamètre A' est pris pour base.

On peut encore démontrer la seconde proposition par la géométrie, et, à cet effet, il suffira de faire voir que la surface d'un parallélogramme formé sur un système de diamètres con-

jugués, ne variera pas, quelle que soit la position de ces diamètres, puisque, dans l'une de toutes ces positions, ils deviennent les axes; mais nous nous dispenserons de donner ici ce théorème qu'on trouve dans tous les traités sinthétiques des sections coniques, et en partant de ce qui précède, nous développerons cette proposition que *de tous les systèmes de diamètres conjugués, celui des axes est le seul qui comprenne un angle droit.* A cet effet, on posera cette formule connue,

$$\text{tang}\,(\alpha'-\alpha)=\frac{\text{tang}\,\alpha'-\text{tang}\,\alpha}{1+\text{tang}\,\alpha'\ \text{tang}\,\alpha},$$

$\alpha'-\alpha$ étant l'angle entre deux diamètres conjugués : écrivant pour tang α sa valeur $-\frac{B^2}{A^2\,\text{tang}\,\alpha'}$, donnée (69), on aura cette expression de tang $(\alpha'-\alpha)$,

$$\text{tang}\,(\alpha'-\alpha)=\frac{A^2\,\text{tang}\,\alpha+\frac{B^2}{\text{tang}\,\alpha}}{B^2-A^2};$$

l'hypothèse tang $\alpha=0$ donne $\frac{B^2}{0}=\infty$, et celle de tang $\alpha=\infty$, conduit à $\frac{A^2\times\infty}{B^2-A^2}=\infty$. Donc, hors ces deux cas dans lesquels les diamètres se confondent avec les axes, on ne peut avoir tang $(\alpha'-\alpha)=\infty$, si ce n'est, comme nous l'avons déjà reconnu, pour $B=A$, ce qui ramène au cercle.

On pourra, quant à l'hyperbole, démontrer de la même manière la proposition correspondante, et tenir compte du cas de l'hyperbole équilatère, donné par $B=A$.

71. Si l'on voulait un système de diamètres conjugués $2A'$, $2B'$ égaux, il faudrait déterminer les angles α, α', d'après la condition

$$A^2\sin^2\alpha+B^2\cos^2\alpha=A^2\sin^2\alpha'+B^2\cos^2\alpha',$$

donnée par les valeurs (3) et (4) : on en déduit

$$\cos^2\alpha\,(A^2\,\text{tang}^2\,\alpha+B^2)=\cos^2\alpha'\,(A^2\,\text{tang}^2\,\alpha'+B^2);$$

or l'hypothèse $\text{tang}^2\alpha = \text{tang}^2\alpha'$ satisfait visiblement, puisqu'on a en même temps $\cos^2\alpha = \cos^2\alpha'$: de là résulte

$$\text{tang}\,\alpha = -\,\text{tang}\,\alpha',$$

parce que d'après la relation (1), le produit de ces tangentes doit être négatif ; et alors

$$\text{tang}\,\alpha = \pm\frac{A}{B},$$

le signe supérieur étant relatif au diamètre $2A'$, par exemple, et l'autre au diamètre $2B'$.

Fig. 58. Ainsi, pour construire ces diamètres, on joindra l'extrémité B du second axe avec les extrémités A et A' du premier ; la tangente de l'angle BAX sera $-\frac{B}{A}$, et $\frac{B}{A}$ sera celle de l'angle $BA'X$, ensorte que les deux diamètres menés par le centre, parallèlement à ces deux cordes, seront égaux, et ce système de diamètres est unique ; par rapport à lui l'équation de l'ellipse devient

$$y'^2 + x'^2 = A^2 ;$$

elle est analogue à celle du cercle, pour lequel on a de plus $\alpha' - \alpha = 100^\circ$ (69), ce qui n'a pas lieu ici. On observera d'ailleurs que la relation

$$A'^2 + B'^2 = A^2 + B^2,$$

qui, dans le cas de $A' = B'$, devient $2A'^2 = A^2 + B^2$, n'entraîne pas l'égalité des demi-axes A et B : on en tire

$$A' = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{2}}$$

expression qui fournit une construction bien simple des diamètres conjugués égaux.

72. Les trois équations (7), (8), (9), renferment les six quantités A, B, A', B', α, α', ensorte que trois d'entre elles étant données, on peut toujours découvrir les trois autres. Supposons, par exemple, qu'on connaisse les demi-diamètres

conjugués A', B', et l'angle $\alpha' - \alpha$ qu'ils font entre eux, et qu'on recherche les demi-axes A et B. A cet effet, ayant multiplié par 2 l'équation (9), puis ajouté ce produit à la somme des deux premières, et de la même somme retranché le même produit, si de part et d'autre, dans les deux équations résultantes, on extrait la racine carrée, on trouve

$$A + B = \sqrt{\{ A'^2 + B'^2 + 2A'B' \sin(\alpha' - \alpha) \}},$$
$$A - B = \sqrt{\{ A'^2 + B'^2 - 2A'B' \sin(\alpha' - \alpha) \}},$$

d'où il est aisé de déduire séparément A et B. Mais l'angle $\alpha' - \alpha$ étant donné, on en connaît la tangente que nous désignerons par n, ensorte que des deux équations

$$\text{tang}(\alpha' - \alpha) = n, \quad \text{tang}\,\alpha . \text{tang}\,\alpha' = -\frac{B^2}{A^2},$$

on déduira les angles α, α', qui fixent la position des axes.

73. De l'équation de l'ellipse rapportée au centre et à des diamètres conjugués $2A'$, $2B'$, laquelle est

$$A'^2y^2 + B'^2x^2 = A'^2B'^2,$$

on peut passer à la suivante,

$$A'^2y^2 + B'^2x'^2 = 2B'^2A'x',$$

par la substitution

$$x = A' - x',$$

qui revient à transporter l'origine de C en M : la courbe est alors rapportée à un système d'axes obliques, dont l'un est le diamètre MM', et l'autre une tangente MT, puisque, pour $x' = 0$, on a deux fois $y = 0$, d'où l'on conclut que ce second axe n'a de commun avec la courbe, que le seul point M. Donc encore la tangente à l'extrémité d'un diamètre, est parallèle à son conjugué. Par rapport à ces axes MM', MT', l'équation de l'ellipse conserve la forme que nous lui avons trouvée (30) pour le grand axe et une tangente au sommet. Fig. 58.

74. De cette propriété dont jouit tout diamètre, de diviser en deux parties égales les doubles transversales dans la courbe, parallèles à son conjugué, on conclut cette construction pour trouver le centre d'une ellipse. On mènera dans cette courbe deux transversales parallèles, et la ligne qui les divisera également, sera un diamètre, et son milieu le centre cherché. On reconnaîtra que ce diamètre est un axe, s'il est perpendiculaire aux cordes parallèles.

Il est visible que cette construction est également propre à faire retrouver le centre d'une hyperbole; mais qu'elle ne s'étend pas à la parabole. Nous donnerons plus loin un procédé graphique pour déterminer les axes de ces courbes, le centre étant supposé connu.

75. Passons à l'hyperbole : de son équation

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2,$$

on déduira par les substitutions,

$$y = x'\sin\alpha + y'\sin\alpha', \quad x = x'\cos\alpha + y'\cos\alpha',$$

la transformée

$$(A^2\sin^2\alpha' - B^2\cos^2\alpha')y'^2 + (A^2\sin^2\alpha - B^2\cos^2\alpha)x'^2 = -A^2B^2 \ldots (12),$$

et cette condition de l'évanouissement du rectangle

$$A^2\sin\alpha\sin\alpha' - B^2\cos\alpha\cos\alpha' = 0,$$

d'où résulte

$$\text{tang}\,\alpha.\,\text{tang}\,\alpha' = +\frac{B^2}{A^2} \ldots\ldots (13).$$

Si l'on suppose successivement $y' = 0$, $x' = 0$, on aura les distances de l'origine aux points dans lesquels la courbe coupe les diamètres auxquels elle est rapportée, et représentant ces distances par A' et B', on trouvera

$$(14) \ldots A'^2 = \frac{-A^2B^2}{A^2\sin^2\alpha - B^2\cos^2\alpha}, \quad B'^2 = \frac{-A^2B^2}{A^2\sin^2\alpha' - B^2\cos^2\alpha'} \ldots (15);$$

l'équation (12) prendra donc la forme

$$A'^2y'^2 + B'^2x'^2 = + A'^2B'^2 \ldots\ldots (16).$$

Or si l'on suppose le demi-diamètre A' réel, ce qui emporte la condition

$$B^2\cos^2\alpha > A^2\sin^2\alpha, \text{ où } \operatorname{tang}\alpha < \frac{B}{A},$$

on aura nécessairement, d'après la relation (13),

$$\operatorname{tang}\alpha' > \frac{B}{A}, \text{ d'où } B^2\cos^2\alpha' < A^2\sin^2\alpha',$$

et conséquemment le demi-diamètre B' imaginaire, ou de la forme $B'\sqrt{-1}$, ensorte que l'équation de l'hyperbole rapportée à des diamètres conjugués, est

$$A'^2y'^2 - B'^2x'^2 = - A'^2B'^2 \ldots\ldots (17).$$

Pareillement du demi-diamètre B' supposé réel, on eût conclu A' imaginaire. La relation (13) apprend que, dans l'hyperbole, les diamètres conjugués sont des angles aigus d'un même côté de l'axe des abscisses. Si dans l'équation (17) on fait les substitutions par lesquelles on repasse des coordonnées obliques aux coordonnées rectangulaires, on retombera sur une transformée identique avec l'équation de l'hyperbole aux axes, et cette identité donnera

$$A^2 = A'^2\cos^2\alpha - B'^2\cos^2\alpha' \ldots\ldots (18)$$
$$-B^2 = A'^2\sin^2\alpha - B'^2\sin^2\alpha' \ldots\ldots (19)$$
$$-A^2B^2 = -A'^2B'^2\sin^2(\alpha' - \alpha) \ldots (20).$$

Ajoutant les deux premières, on obtient cette propriété,

$$A^2 - B^2 = A'^2 - B'^2 \ldots\ldots (21);$$

et de la dernière, on déduit celle-ci,

$$AB = A'B'\sin(\alpha' - \alpha) \ldots (22).$$

Ces résultats sont ceux que nous avons précédemment obtenus pour l'ellipse, en changeant dans ceux-ci, B' en $B'\sqrt{-1}$.

On a donc, dans l'hyperbole, *la différence des carrés des demi-diamètres conjugués, égale à la différence des carrés des demi-axes, et le parallélogramme construit sur ces demi-diamètres, égal au rectangle des demi-axes.*

De la propriété

$$A^2 - B^2 = A'^2 - B'^2,$$

on déduit, dans l'hypothèse $A = B$, cette conclusion $A' = B'$, et réciproquement; l'hyperbole équilatère est donc la seule qui ait des diamètres conjugués égaux.

76. Nous avons déjà reconnu (57) que l'équation

$$xy = M^2$$

représentait une hyperbole dans laquelle les axes étaient asymptotes: or pour revenir de l'équation

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2$$

à cette forme, il faut employer les substitutions qui font passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées obliques, et égaler à zéro les coefficiens des carrés des variables dans la transformée qui est

$$(A^2\sin^2\alpha' - B^2\cos^2\alpha')y'^2 + (A^2\sin^2\alpha - B^2\cos^2\alpha)x'^2$$
$$+ 2(A^2\sin\alpha\sin\alpha' - B^2\cos\alpha\cos\alpha')x'y' = -A^2B^2 \ldots\ldots (23);$$

on a donc ces deux conditions,

$$A^2\sin^2\alpha' - B^2\cos^2\alpha' = 0, \quad A^2\sin^2\alpha - B^2\cos^2\alpha = 0,$$

et conséquemment,

$$\text{tang}^2\alpha' = \frac{B^2}{A^2}; \quad \text{tang}^2\alpha = \frac{B^2}{A^2}:$$

d'où résultent ces deux valeurs,

$$(24)\ldots \operatorname{tang}\alpha' = -\frac{B}{A},\ \operatorname{tang}\alpha = +\frac{B}{A}\ldots(25),$$

ou celles-ci,

$$(26)\ldots \operatorname{tang}\alpha' = +\frac{B}{A},\ \operatorname{tang}\alpha = -\frac{B}{A}\ldots(27),$$

puisqu'autrement les deux axes n'en feraient qu'un : or si l'on suppose que l'angle α se rapporte à l'asymptote sur laquelle on compte les x', et qu'ainsi l'angle α' soit relatif à l'autre asymptote, on déterminera ces deux lignes, en menant une tangente au sommet A, sur laquelle on prendra $AB' = -B$, et $AB = +B$, ensorte que CB' et CB seront les axes asymptotiques. Mais si on regarde comme positives les coordonnées des points de la branche MAm, et conséquemment comme négatives celles de la branche $M'A'm'$, le rectangle $x'y'$ sera positif dans toute l'hyperbole, ce qui exige que son coefficient soit négatif; condition qui est satisfaite par $\sin\alpha$ négatif, les autres lignes trigonométriques étant positives; et alors on emploie les valeurs (26) et (27). On a donc Fig. 54.

$$\sin\alpha.\sin\alpha' = \frac{-B^2}{A^2+B^2},\ \cos\alpha\cos\alpha' = \frac{A^2}{A^2+B^2};$$

et pour transformée,

$$\frac{-4A^2B^2}{A^2+B^2}x'y' = -A^2B^2,\ \text{ou}\ x'y' = \frac{A^2+B^2}{4};$$

Telle est donc l'équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes prises pour axes des coordonnées. On déduira des expressions (26) et (27) comparées aux expressions obtenues (71), que les diamètres égaux de l'ellipse, prolongés, deviennent les asymptotes d'une hyperbole construite sur les mêmes axes.

Lorsque $B = A$, il arrive que

$$\operatorname{tang}\alpha'.\operatorname{tang}\alpha + 1 = 0,$$

c'est-à-dire que les asymptotes sont à angle droit, ce qu'on a déjà vu (30, 49, 58).

77. Il nous reste à rechercher s'il existe dans la parabole des systèmes de diamètres conjugués par rapport auxquels son équation conserve la forme

$$y^2 = 2px :$$

il est clair qu'on ne pourrait arriver à une transformée à deux termes, en substituant pour y et x les formules

$$y = x' \sin\alpha + y' \sin\alpha', \quad x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha',$$

puisqu'on n'introduirait que deux indéterminées, tandis qu'on aurait trois termes à faire disparaître; il faut donc en même temps déplacer l'origine, et conséquemment employer les substitutions

$$y = b + x' \sin\alpha + y' \sin\alpha', \quad x = a + x' \cos\alpha + y' \cos\alpha',$$

d'où résulte la transformée

$$y'^2 \sin^2\alpha' + 2x'y' \sin\alpha \sin\alpha' + x'^2 \sin^2\alpha$$
$$+ 2(b \sin\alpha' - p \cos\alpha')y' + 2(b \sin\alpha - p \cos\alpha)x' + b^2 - 2ap = 0.$$

Pour que l'axe des x' divise également toutes les cordes parallèles à celui des y', il faut que cette équation se réduise à

$$y'^2 = 2\frac{(p \cos\alpha - b \sin\alpha)}{\sin^2\alpha'} x' \ldots\ldots (28),$$

et alors l'axe des y' ne fait que toucher la courbe à l'origine, ainsi qu'il arrive à l'axe des y. On a donc ces conditions,

$$\sin\alpha \sin\alpha' = 0, \quad \sin^2\alpha = 0, \quad b \sin\alpha' - p \cos\alpha' = 0, \quad b^2 - 2ap = 0;$$

la seconde de ces équations donne $\sin\alpha = 0$, valeur qui anéantit la première, et qui apprend que l'axe des x' est parallèle

à l'axe principal de la courbe. Il ne reste donc que deux équations pour déterminer α' et les coordonnées a et b de la nouvelle origine, laquelle est sur la parabole, puisque la relation, entre a et b est celle même qui existe entre les coordonnés x y de tous les points de la parabole; l'une de ces quantités a, par exemple, sera donc arbitraire, et l'inclinaison de l'axe des y' sur celui des x' sera donnée par

$$\sin^2\alpha' = \frac{p^2}{b^2+p^2} = \frac{p}{2a+p},$$

à cause de $b^2 = 2ap$. La transformée (28) devient donc

$$y'^2 = (4a+2p)\,x', \text{ ou } y'^2 = 2p'x',$$

en faisant $2a+p=p'$.

78. Nous allons faire quelques applications de la théorie exposée dans ce chapitre, en généralisant les questions.

Étant donnée l'équation

$$5y^2+6xy+5x^2+6\sqrt{2}.y+16\sqrt{2}.x+2=0,$$

on propose de rapporter directement la courbe qu'elle représente [illegible] centre et à des diamètres capables d'un angle dont la tangente $= -\frac{5}{3}$.

D'abord, transportant l'origine au centre par les substitutions

$$y=b+y',\ x=a+x',$$

on trouvera pour ces coordonnées, $b=0$, $a=-\sqrt{2}$, et pour transformée,

$$5y'^2+6x'y'+5x'^2-8=0;$$

reste à faire disparaître le terme du rectangle au moyen des

formules qui font passer des axes rectangulaires aux axes obliques, et qui sont

$$y' = x'' \sin \alpha + y'' \sin \alpha',$$
$$x' = x'' \cos \alpha + y'' \cos \alpha'.$$

Le résultat de ces substitutions est l'équation aux diamètres conjugués

$$(5\sin^2 \alpha' + 6 \sin \alpha' \cos \alpha' + 5\cos^2 \alpha')\, y''^2$$
$$+ (5\sin^2 \alpha + 6 \sin \alpha \cos \alpha + 5 \cos^2 \alpha)\, x''^2 - 8 = 0,$$

sous la condition du coefficient du rectangle égalé à zéro, laquelle est

$$5 \sin \alpha \sin \alpha' + 5 \cos \alpha \cos \alpha' + 3 \sin \alpha \cos \alpha' + 3 \sin \alpha' \cos \alpha = 0,$$

d'où l'on déduit après la division par $\cos \alpha \cos \alpha'$,

$$5 \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \alpha' + 5 + 3 \operatorname{tang} \alpha + 3 \operatorname{tang} \alpha' = 0;$$

or les diamètres devant faire entre eux un angle dont la tangente soit $-\frac{5}{3}$, on a

$$\operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = -\tfrac{5}{3} = \frac{\operatorname{tang} \alpha' - \operatorname{tang} \alpha}{1 + \operatorname{tang} \alpha' \operatorname{tang} \alpha},$$

et de là

$$5 \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \alpha' + 5 - 3 \operatorname{tang} \alpha + 3 \operatorname{tang} \alpha' = 0$$

ces deux équations donnent

$$\operatorname{tang} \alpha = 0, \quad \operatorname{tang} \alpha' = -\tfrac{5}{3},$$

et la transformée devient

$$\tfrac{80}{34} y''^2 + 5x''^2 - 8 = 0,$$

ou bien

$$\tfrac{8}{5} y''^2 - \tfrac{17}{5} x''^2 = \tfrac{136}{85}.$$

L'équation aux axes serait

$$4y^2 + x^2 = 4,$$

et si on employait l'analyse du chapitre IX, on retomberait sur la même équation aux diamètres, en prenant encore $-\frac{1}{2}$ pour la tangente de l'angle qu'ils doivent comprendre.

Si on veut rapporter directement l'hyperbole de l'équation

$$y^2 - 2xy - x^2 + 2 = 0$$

à ses asymptotes, en observant que l'origine est au centre, on emploiera les formules

$$y = x' \sin\alpha + y' \sin\alpha', \quad x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha',$$

et on trouvera ces conditions d'évanouissement des carrés des variables

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$
$$\cos^2\alpha' - \sin^2\alpha' + 2\sin\alpha'\cos\alpha' = 0:$$

l'une d'elles fera donc connaître les deux angles α, α'. La première donne

$$\text{tang}\,\alpha = 1 \pm \sqrt{2};$$

donc

$$\text{tang}\,\alpha = 1 + \sqrt{2}, \quad \text{tang}\,\alpha' = 1 - \sqrt{2}.$$

Nous prendrons ici (76) $\sin\alpha'$ négatif, et $\cos\alpha'$ positif. On déduit de ces valeurs des tangentes

$$\sin\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}, \quad \sin\alpha' = -\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}, \quad \cos\alpha' = \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}};$$

ensorte que la transformée

$$(\sin\alpha\sin\alpha' - \cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha'\cos\alpha - \cos\alpha'\sin\alpha)x'y' + 1 = 0,$$

devient par ces substitutions,

$$x'y' = 1.$$

Si on eût employé la formule des asymptotes (50), on aurait trouvé pour équation de ces lignes,

$$y = (1 \pm \sqrt{2})x,$$

et conséquemment encore

$$\text{tang}\,\alpha = 1 \pm \sqrt{2},$$

d'où résulte

$$\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha' + 1 = 0;$$

les asymptotes sont donc à angle droit, ce qu'annonce la forme même de l'équation.

Les élèves pourront s'exercer à rapporter la parabole

$$y^2 - 2xy + x^2 - 2y - 1 = 0,$$

à un système de diamètres conjugués capables d'un angle dont la tangente $= 1$: ils trouveront pour les coordonnées de l'origine,

$$a = -1,\ b = 0,$$

puis

$$\text{tang}\,\alpha = 1,\ \text{tang}\,\alpha' = \infty,$$

et pour équation réduite,

$$y'^2 - x'\sqrt{2} = 0:$$

ils observeront qu'à l'équation de condition sous laquelle le rectangle disparaît, et qui est

$\text{tang}\,\alpha\,(\text{tang}\,\alpha' - 1) - (\text{tang}\,\alpha' - 1) = 0$, d'où $\text{tang}\,\alpha = 1$,

on doit joindre celle-ci, $\text{tang}\,(\alpha' - \alpha) = 1$.

CHAPITRE X.

Théorèmes généraux sur les courbes du premier degré et Problèmes.

79. L'ÉQUATION générale du second degré à deux variables, divisée par le facteur de y^2, ne renferme plus que cinq coefficiens; si donc ils sont inconnus, les données de cinq points suffiront pour les déterminer, et un nombre moindre de points n'assujétira pas le cours de la courbe.

Les évaluations deviendront plus faciles, si on fait passer les axes des coordonnées par deux des points donnés. Ainsi les coordonnées des points en question étant

$x^{v}=0$, $y^{v}=0$; x^{v} où $x^{iv}=0$, y^{iv}; x''', y'''; x'', y''; x', $y'=0$. Fig. 60.

l'axe AX sera mené par x^{v} ou x^{iv}, x'; et l'axe AY par x^{iv}, y^{iv}. L'équation générale

$$y^2+axy+bx^2+cy+dx+f=0$$

donnera cette détermination, pour $x^{v}=0$, $y^{v}=0$,

$$f=0:$$

pour $x^{iv}=0$, y^{iv}, l'équation se réduit à

$$y^{iv2}+cy^{iv}+f=0;$$

pour x''', y''', à

$$y'''^2+ax'''y'''+bx'''^2+cy'''+dx'''+f=0;$$

pour x'', y'', à

$$y''^2+ax''y''+bx''^2+cy''+dx''+f=0;$$

enfin pour x', $y' = 0$, à

$$bx'^2 + dx' + f = 0.$$

On observera que ces équations étant du premier degré en a, b, c, d, e et f, les déterminations de ces inconnues seront toujours possibles. Par la première de ces équations, f est nul, et par la seconde, $c = -y'^{IV}$; il est donc facile d'évaluer les autres coefficiens. La courbe de l'équation générale, après la substitution faite des valeurs de a, b, c, d, f, passera par les cinq points donnés.

80. Soit $BCmM$ la courbe de l'équation

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + f = 0,$$

Fig. 61. rapportée aux deux axes AX, AY, faisant entre eux un angle quelconque : mise sous cette forme,

$$y^2 + (ax + c)y + (bx^2 + dx + f) = 0 \ldots (1),$$

le coefficient $ax + c$ du second terme est égal à la somme $Pm + PM$ des racines, et le troisième terme est le produit des mêmes racines, c'est-à-dire, $Pm \times PM$, ensorte qu'on a

$$ax + c = Pm + PM \ldots\ldots (2),$$
$$bx^2 + dx + f = Pm \times PM \ldots\ldots (3).$$

Supposons que $x - p$, $x - q$ soient les deux facteurs du trinôme $x^2 + \frac{d}{b}x + \frac{f}{b}$: on aura donc

$$(x - p)(x - q) = \tfrac{1}{b} Pm \times PM \ldots (4);$$

mais pour $y = 0$, l'équation (1) se réduisant à

$$x^2 + \frac{d}{b}x + \frac{f}{b} = 0 = (x - p)(x - q),$$

on a $x = p = AB$, $x = q = AC$, et conséquemment.....
$x - p = BP$, $x - q = CP$, ensorte que l'équation (4)

donne cette propriété,

$$PB \times PC = \frac{1}{b} Pm \times PM,$$

ou

$$\frac{Pm \times PM}{PB \times PC} = b \ldots\ldots (8).$$

Dans la parabole, le diamètre *FH* que nous prendrons pour axe des abscisses, et que nous supposerons diviser également les transversales de la courbe, la rencontre au point *a* que nous prendrons pour origine, et en un autre point infiniment éloigné; ensorte qu'on aura ici les quotiens constans $\frac{\overline{PM}^2}{Pa \times \infty}$, $\frac{\overline{pm}^2}{pa \times \infty}$, etc., et comme ils sont égaux, on peut donc poser Fig. 62.

$$\overline{PM}^2 = \frac{\overline{pm}^2}{pa} \times Pa;$$

désignant par $2p'$ le rapport constant $\frac{\overline{pm}^2}{pa}$, et faisant $PM = y$, $aP = x$, on a cette équation,

$$y^2 = 2p'x,$$

qu'on sait être celle de la parabole.

Dans l'ellipse, le diamètre *FH* analogue au précédent rencontre la courbe en deux points *a* et *a'* : faisons $Ca = Ca' = A'$, $C\alpha = C\alpha' = B'$, et nous aurons. Fig. 63.

$$\frac{\overline{PM}^2}{Pa \times Pa'} = \frac{\overline{C\alpha}^2}{Ca \times Ca'} = \frac{B'^2}{A'^2};$$

posant $Pa = x$, d'où $Pa' = 2A' - x$, nous trouverons pour équation,

$$y^2 = \frac{B'^2}{A'^2}(2A'x - x^2).$$

Dans l'hyperbole, la propriété devient

Fig. 64.
$$\frac{\overline{PM}^2}{Pa.Pa'} = constante;$$

or on peut toujours supposer cette constante égale au rapport entre une surface B'^2 et le carré Ca que nous désignerons par A'^2; conséquemment

$$y^2 = \frac{B'^2}{A'^2}(2A'x + x^2)$$

81. Ce théorème qui n'est qu'un cas particulier d'un autre plus général, lequel est applicable à toutes les courbes du premier degré, nous a fourni le moyen de déduire de l'équation générale à six termes, des transformées à deux et à trois termes qui ont la même étendue de signification, et cette réduction n'a pas exigé l'emploi des formules qui servent à opérer le déplacement de l'origine et le changement de position des axes : cependant il faut observer qu'il ne prouve que l'existence des transformées.

82. Il résulte du théorème qui vient d'être démontré, que

Fig. 61.
$$\frac{A'H \times HC'}{BH \times HC''} = \frac{1}{b}; \frac{A'I \times IC'}{DI \times IF} = \frac{1}{b}, \frac{A''K \times KC''}{DK \times KF} = \frac{1}{b}, \text{ etc. :}$$

pour s'en assurer, on supposera l'axe AX transporté parallèlement à lui-même en $A'X'$, $A''X''$, etc., par la substitution $y - m = y'$ dans l'équation du second degré; et en partant de cette transformée, on sera conduit aux propriétés énoncées.

On voit donc que, *dans une section conique, si deux cordes se coupent, les produits des segmens de l'une est au produit des segmens de l'autre dans un rapport constant.* Si la courbe est un cercle, auquel cas $b = 1$, à cause de $A = B$ (38), on retombe sur cette propriété connue, que deux cordes dans le cercle se coupent en partie réciproquement proportionnelles.

83. Nous sommes maintenant en état de résoudre graphiquement cette question :

Décrire une section conique qui passe par cinq points donnés.

Soïent ces points A, B, C, D, E: menons AC, BE, qui se couperont en H, à BE la parallèle DI qui rencontrera AC en I, puis à AC la parallèle EK qui rencontrera la ligne DI en K. Prolongeons ID jusqu'en F, et EK jusqu'en G, de manière qu'on ait Fig. 65.

$$\frac{AH \times HC}{BH \times HE} = \frac{AC \times IC}{FI \times ID} = \frac{EK \times KG}{FK \times KD},$$

et les points F et G appartiendront à la section conique. Qu'on coupe AC, EG en deux parties égales, en N et O, ainsi que BE et FD en L et M; les lignes NO, et LM se couperont au centre de la section, puisque chacune d'elles divisera en deux parties égales deux cordes parallèles (74).

84. Proposons-nous maintenant de trouver les coordonnées des intersections des lignes représentées par les équations

$$y = \frac{a}{b}x,\ y^2 + ay = x^2 + bx:$$

à cet effet, on éliminera x et y entre ces deux équations, ce qui donnera

$$x = 0,\ y = 0;\ x = -b,\ y = -a;$$

ainsi la droite rencontrera la courbe dans deux points. Le centre de l'hyperbole a pour coordonnées

$$x = -\frac{b}{2},\ y = -\frac{a}{2},$$

et comme elles satisfont à l'équation de la droite, il s'ensuit que cette ligne passe par le centre de l'hyperbole. La substitution de $\frac{a}{b}x$ pour y dans l'équation de la courbe, donne

$$\frac{a^2}{b^2}x^2 + \frac{a^2}{b}x = x^2 + bx,$$

et pour $x = \infty$,

$$\frac{a^2}{b^2}x^2 = x^2; \text{ d'où } a = b;$$

ensorte que les proposées deviennent

$$y = x,\ y^2 + ay - x^2 - ax = 0;$$

la première est facteur de la seconde qui se change en

$$(y - x)(y + x + a) = 0 :$$

l'hyperbole dégénère donc en deux droites qui passent par le centre, et qui sont perpendiculaires l'une à l'autre en ce point : aussi sous l'hypothèse $a = b$, il arrive que les asymptotes de l'hyperbole donnée se changent dans les deux droites

$$y = x,\ y = -x - a.$$

Chèrchons maintenant les coordonnées des points qui peuvent être communs aux courbes représentées par les équations

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y - 2x = 0,$$
$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2x = 0:$$

l'équation finale résultante de l'élimination de y, est

$$2(x - 1)x = 0,$$

et le diviseur commun

$$y - 2x = 0.$$

Les systèmes de solution, c'est-à-dire, les coordonnées des intersections sont donc

$$x = 0,\ y = 0;\ x = 1,\ y = 2.$$

Conséquemment ces deux courbes ne se coupent qu'en deux points. Les diamètres de ces ellipses, donnés par les équations proposées résolues par rapport à y, sont parallèles.

Soit le système des deux équations

$$y^2 - 2xy + x^2 - 2y - 1 = 0,$$
$$y^2 - 2xy + x^2 + x = 0,$$

qui représentent des paraboles. L'équation finale en x est

$$9x^2 + 10x + 1 = 0,$$

et le diviseur commun

$$2y + x + 1 = 0.$$

On a ces solutions,

$$x = -1, y = 0; \quad x = -\tfrac{1}{9}, y = -\tfrac{4}{9}.$$

Les deux courbes se coupent donc en deux points; et on trouvera que des quatre diamètres parallèles, deux se confondent.

Nous prendrons pour dernier exemple une ellipse et une parabole, représentées par

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y + 2x = 0,$$
$$y^2 - 2xy + x^2 + x = 0.$$

L'équation finale est

$$x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x = 0;$$

le diviseur commun,

$$2y - x^2 - x = 0,$$

et les systèmes de solutions,

$$x = 0, y = 0; \quad x = -1, y = 0.$$

Les deux autres racines de l'équation en x sont imaginaires; savoir,

$$x = \tfrac{3}{4} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{-7}.$$

Ces exemples sont plus que suffisans pour diriger l'élève dans la solution de ces sortes de questions qui, à proprement parler, appartiennent à l'élimination qu'on combinera ici avec la discussion.

85. Nous venons de trouver

$$x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x = 0,$$

pour résultat de l'élimination de y entre les équations d'une ellipse et d'une parabole, et nous savons que les racines de cette équation finale, sont les abscisses des intersections de ces deux courbes : on voit donc que la question de construire géométriquement les racines d'une équation, ramène à la recherche des abscisses des points de rencontre de deux lignes du second ordre, dont les équations ont la proposée pour équation finale : mais comme de tels systèmes d'équations sont en nombre indéfini, on pourra prendre arbitrairement l'une des deux courbes. Supposons, pour exemple,

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0,$$

et pour l'une des courbes, celle qui a pour équation

$$x^2 = py;$$

on en déduira

$$x^4 = p^2y^2;$$

et substituant ces valeurs dans la proposée, on trouvera cette équation de la seconde courbe,

$$p^2y^2 + 4pyx + 3py - 4x - 4 = 0,$$

qui est une hyperbole. Si nous faisons, pour simplifier, $p = 1$, les équations à construire seront

$$x^2 = y;\ y^2 + 4xy + 3y - 4x - 4 = 0:$$

la première est une parabole construite sur l'axe des y, pris

pour axe des abscisses : la seconde, résolue par rapport à y, donne

$$y = -2x - \tfrac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{16x^2 + 40x + 25}}{2}.$$

c'est-à-dire,

$$y = 1, \; y = -4x - 4.$$

Les abscisses des points dans lesquels ces droites coupent la parabole, sont les racines de la proposée : on s'en assurera, en écrivant dans l'équation de la parabole, les valeurs de y trouvées plus haut, et dont les substitutions dans $x^2 = y$, donnent

$$x^2 - 1 = 0, \; x^2 + 4x + 4 = 0$$

équations dont les racines

$$x = \pm 1, \; x = -2, \; x = -2$$

sont en effet celles de l'équation donnée ; les deux dernières $x = -2$ font voir que la droite $y = -4x - 4$ touche la parabole, puisqu'elle n'a qu'un point commun avec cette courbe.

Pour construire l'équation

$$x^4 - px^2 - qx - r = 0,$$

on pourra prendre arbitrairement celle-ci

$$x^2 = ay$$

et on en déduira

$$a^2y^2 - pay - qx - r = 0$$

équation d'une autre parabole. Les racines de la proposée seront les abscisses des intersections de ces deux courbes qui pourront être au nombre de quatre.

Les élèves ont pris dans ce que nous venons de dire une idée de la solution de ces sortes de questions, et du parti qu'on peut en tirer dans la résolution des équations des troisième et quatrième degrés.

CHAPITRE XI.

Des Tangentes, normales, soutangentes, sounormales aux Courbes du premier degré.

86. Les courbes du premier degré, rapportées au sommet et à un axe principal, ont pour équations

$$y^2 = mx + nx^2,$$

les quantités m et n étant $\frac{2B^2}{A}$ et $-\frac{B^2}{A^2}$ pour l'ellipse, $\frac{-2B^2}{A}$; $\frac{B^2}{A^2}$ pour l'hyperbole; $2p$ et o pour la parabole.

87. Nous considérerons la tangente comme une sécante dont les deux points d'intersection se réunissent en un seul, ensorte que, dans cette position, elle n'a plus qu'un point commun avec la courbe qui est tout entière située d'un même côté par rapport à cette ligne.

Un des points par lesquels doit passer la sécante, étant x', y', on dira que ce point est sur la courbe

$$y^2 = mx + nx^2,$$

en écrivant

$$y'^2 = mx' + nx'^2;$$

la sécante devant aussi passer par ce point, son équation sera de la forme

$$y - y' = a(x - x'),$$

a étant la tangente de l'inclinaison de la droite sécante sur l'axe

des abscisses, et il s'agit de déterminer a, d'après la condition que la sécante devienne tangente.

Cherchons généralement les coordonnées des intersections de la sécante avec la courbe; elles doivent satisfaire en même temps aux trois équations précédentes; car les points auxquels elles appartiennent, se trouvent en même temps sur la courbe et sur la droite : en retranchant la seconde équation de la première, on obtient celle-ci,

$$(y-y')(y+y')=n(x-x')(x+x')+m(x-x');$$

mettant pour y sa valeur $y'+a(x-x')$, tirée de l'équation de la droite, on trouve, après avoir fait passer tous les termes dans un seul membre,

$$(x-x')\{2ay'+a^2(x-x')-n(x+x')-m\}=0;$$

équation qui, donnant deux valeurs de x, apprend qu'une droite peut couper une courbe du premier degré en deux points. L'abscisse d'une des intersections, donnée par $x-x'=0$, est $x=x'$, valeur qui, substituée dans l'équation de la droite, donne $y=y'$, ce qu'on savait d'avance : l'autre facteur égalé à zéro, donnerait l'abscisse du second point d'intersection, au moyen de la quantité a qui est inconnue, et l'on sent en effet que la première quantité dépend de la seconde.

Dans cette recherche, on ne connaît pas la direction de la tangente ; on sait seulement qu'elle doit résulter de la coïncidence des deux intersections : conséquemment, si nous faisons $x=x'$ dans le second facteur égalé à zéro, pour dire que le second point x, y vient se réunir au premier x', y', qui est celui de tangente, la valeur correspondante de a sera celle qui convient à la tangente. On trouve ainsi

$$2ay'-2nx'-m=0, \text{ d'où } a=\frac{2nx'+m}{2y'}.$$

Par cette valeur de a, l'équation de la sécante se change dans

celle de la tangente, qui est donc

$$y - y' = \frac{2nx' + m}{2y'}(x - x').$$

88. On appelle *normale* une perpendiculaire à la tangente au point de tangence : cette ligne devant passer par le point x', y', aura une équation de la forme

$$y - y' = a'(x - x'),$$

et parce qu'elle doit être perpendiculaire à la tangente, on a (pag. 25, *prob.* 4°)

$$a' = -\frac{2y'}{2nx' + m};$$

conséquemment, la normale est représentée par

$$y - y' = -\frac{2y'}{2nx' + m}(x - x').$$

89. Si dans l'équation de la tangente, on fait $y = 0$, l'abscisse correspondante sera celle de l'intersection de la tangente avec l'axe, c'est-à-dire, AT : on aura donc

Fig. 66.

$$x - x' = -\frac{2y'^2}{m + 2nx'};$$

si l'on considère que $x = AT$ est nécessairement d'un signe contraire à $AP = x'$, on reconnaîtra que $x - x' = AT + AP = TP$, qu'on nomme *soutangente*, parce que c'est la portion de l'axe des abscisses, située au-dessous de la partie TM de la tangente : le signe — qui précède PT, indique que cette ligne doit être d'un signe contraire à celui de $2nx' + m$ ou de a, l'ordonnée y' étant positive ; comme on sait toujours de quel côté on doit porter cette soutangente, à partir du pied de l'ordonnée, nous ne considérerons ici que sa valeur absolue.

L'hypothèse $y = 0$, dans l'équation de la normale, donne

$$x - x' = \frac{m + 2nx'}{2};$$

or $x = AN$, $x' = AP$; donc $x - x' = PN$, qu'on appelle *sounormale*, comme portion de l'axe des abscisses, située au-dessous de la normale MN.

La portion de tangente, comprise entre le point de contact et l'intersection T avec l'axe des abscisses, est

$$TM = \frac{y'}{m + 2nx'} \sqrt{4(n+1)y'^2 + m^2}.$$

La longueur de la normale, mesurée depuis le point de contact jusqu'à l'axe des abscisses, est

$$MN = \tfrac{1}{2} \sqrt{4(n+1)y'^2 + m^2}.$$

90. De ces valeurs générales on passera facilement à celles que prend chacune de ces lignes pour chaque courbe en particulier, en substituant les expressions convenables de m et de n: on aura de cette manière, en ne considérant que les valeurs absolues, ou abstraction faite du signe,

Pour l'ellipse,

$$\text{soutang} = \frac{2Ax' - x'^2}{A - x'}, \quad \text{tang} = \sqrt{y'^2 + \left(\frac{2Ax' - x'^2}{A - x'}\right)^2},$$

$$\text{sounorm} = \frac{B^2}{A^2}(A - x'); \quad \text{norm} = \sqrt{y'^2 + \frac{B^4}{A^4}(A - x')^2};$$

Pour l'hyperbole,

$$\text{soutang} = \frac{2Ax' - x'^2}{A - x'}, \quad \text{tang} = \sqrt{y'^2 + \left(\frac{x'^2 - 2Ax'}{x' - A}\right)^2},$$

$$\text{sounorm} = \frac{B^2}{A^2}(x' - A), \quad \text{norm} = \sqrt{y'^2 + \frac{B^4}{A^4}(x' - A)^2};$$

Pour la parabole,

$$\text{soutang} = 2x', \text{ tang} = 2\sqrt{x'\left(x' + \frac{p}{2}\right)},$$

$$\text{sounorm} = p, \text{ norm} = \sqrt{2p\left(x' + \frac{p}{2}\right)}.$$

Ces abréviations *tang*, *norm*, expriment les portions de la tangente et de la normale, à compter du point de contact jusqu'à l'axe des abscisses.

Lorsqu'on voudra employer toutes ces expressions pour une abscisse donnée, il faudra remplacer y' par sa valeur en x', donnée par l'équation de la courbe individuelle qu'on considère.

91. On transportera l'origine des coordonnées du sommet au centre de la courbe, en posant pour l'ellipse et pour l'hyperbole,

$$x' = A + x'', \text{ d'où } 2Ax' - x'^2 = A^2 - x''^2,$$

ensorte que les expressions précédentes énoncées en coordonnées comptées du centre, savoir, x'', y'', deviennent, en ne prenant que les valeurs absolues,

Pour l'ellipse,

$$\text{soutang} = \frac{x''^2 - A^2}{x''}, \text{ tang} = \sqrt{y''^2 + \left(\frac{A^2 - x''^2}{x''}\right)^2},$$

$$\text{sounorm} = -\frac{B^2}{A^2}x'', \text{ norm} = \sqrt{y''^2 + \frac{B^4}{A^4}x''^2}.$$

Pour l'hyperbole.

$$\text{soutang} = \frac{x''^2 - A^2}{x''}, \text{ tang} = \sqrt{y''^2 + \left(\frac{x''^2 - A^2}{x''}\right)^2},$$

$$\text{sounorm} = \frac{B^2}{A^2}x'', \text{ norm} = \sqrt{y''^2 + \frac{B^4}{A^4}x''^2}.$$

Pour passer de l'ellipse au cercle, et de l'hyperbole ordinaire à l'hyperbole équilatère, il suffit de faire $B = A$. On

remarquera que le produit de la soutangente par la sounormale doit toujours rendre y^2.

92. Si l'on rapporte au centre l'équation générale de la tangente, en faisant toujours $x' = A + x''$ et $x' = A + x$, on trouvera qu'elle est pour l'ellipse,

$$y - y'' = -\frac{B^2 x''}{A^2 y''}(x - x''),$$

laquelle se réduit à

$$A^2 y'' y + B^2 x'' x = A^2 B^2,$$

en observant que $A^2 y''^2 + B^2 x''^2 = A^2 B^2$; et pour l'hyperbole,

$$y - y'' = +\frac{B^2 x''}{A^2 y''}(x - x''),$$

qui devient, d'après l'équation de la courbe pour le point x'', y'',

$$A^2 y'' y - B^2 x'' x = -A^2 B^2.$$

Pour la parabole, il suffira de faire $n = 0$, $m = 2p$ dans l'équation générale de la tangente, d'où résulte

$$y'y = p(x + x').$$

93. Ces équations des tangentes, dans lesquelles x', y sont les coordonnées générales, deviennent les équations mêmes des courbes, lorsqu'on change x en x'', et y en y'', ce qui doit être, puisqu'alors le point x, y est sur la courbe.

94. Dans l'analyse précédente, le point par lequel on menait la tangente, était donné sur la courbe; nous le supposerons extérieur, et nous considérerons, en particulier, l'ellipse, parce qu'il ne sera pas difficile d'étendre aux autres courbes ce que nous dirons de celle-ci. Fig. 67.

Soit x', y' le point M' par lequel on doit mener la tan-

gente ; soient x'', y'' les coordonnées inconnues du point de tangence ; on aura les deux équations

$$A^2y'y'' + B^2x'x'' = A^2B^2,$$
$$A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2,$$

dont la supérieure dit que le point x', y' est sur la tangente : si on retranche la première de la seconde, on trouve celle-ci,

$$A^2(y''^2 - y'y'') + B^2(x''^2 - x'x'') = 0,$$

qu'on peut écrire ainsi,

$$A^2\left(y'' - \frac{y'}{2}\right)^2 + B^2\left(x'' - \frac{x'}{2}\right)^2 = \frac{A^2y'^2 + B^2x'^2}{4}.$$

Qu'on fasse

$$y'' = \frac{y'}{2} + Y, \quad x'' = \frac{x'}{2} + X,$$

et on aura cette transformée,

$$A^2Y^2 + B^2X^2 = \frac{A^2y'^2 + B^2x'^2}{4}.$$

Cette courbe est une ellipse dont les coordonnées du centre sont $\frac{x'}{2}$, $\frac{y'}{2}$. Pour en connaître les demi-axes, on fera successivement $X = 0$, $Y = 0$, d'où résulteront

$$Y^2 = \frac{A^2y'^2 + B^2x'^2}{4A^2} = B'^2,$$
$$X^2 = \frac{A^2y'^2 + B'x'^2}{4B^2} = A'^2.$$

Par ces substitutions, l'équation précédente deviendra

$$A'^2Y^2 + B'^2X^2 = A'^2B'^2.$$

On connaît donc le centre et les axes de l'ellipse qui coupera l'ellipse donnée dans les deux points de tangence, cherchés. On construira ces demi-axes par le triangle-rectangle ; car on a

$$B'^2=\left(\frac{y'}{2}\right)^2+\left(\frac{\frac{B}{A}x'}{2}\right)^2;\quad A'^2=\left(\frac{x'}{2}\right)^2+\left(\frac{\frac{A}{B}y'}{2}\right)^2.$$

On déduit encore des valeurs ci-dessus de A'^2 et de B'^2, cette relation,

$$4A^2B'^2=4B^2A'^2,\text{ d'où }\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'};$$

ainsi les axes de la seconde ellipse sont dans le même rapport que ceux de la première.

95. Nous résoudrons quelques problèmes dont la solution est fondée sur l'analyse des tangentes.

1°. *Soient quatre points* A, B, C, E, *et une droite* AF *donnée de position ; assujétir une section conique à passer par ces quatre points et à toucher la droite au point* A. Fig. 68.

Ayant mené la droite AC, qu'on prendra pour l'axe des abscisses, et la droite BE, à laquelle l'axe des y passant par A soit parallèle, A étant l'origine, on aura pour ce point $x=0$, $y=0$, ensorte que l'équation de la section conique

$$a+bx+cx^2+dy+exy+y^2=0\ldots(M)$$

sera réduite à

$$bx+cx^2+dy+exy+y^2=0\ldots(N).$$

et on aura cette première condition

$$a=0\ldots(1),$$

Pour le point C, on a $y=0$, $x=AC=f$, et de là,

$$bf+cf^2=0,\text{ d'où }b=-cf\ldots(2),$$

dont la substitution dans (N), donne

$$-cfx+cx^2+dy+exy+y^2=0\ldots(P).$$

Pour B, $x=AH=g$, $y=BH=h$, ensorte que la dernière équation devient

$$-cfg+cg^2+dh+egh+h^2=0\ldots(3).$$

Enfin pour le point E, $x=AH=g$, $y=HE=-k$: l'équation (P) se change donc dans celle-ci,

$$-cfg+cg^2-dk-egk+k^2\ldots(4).$$

Retranchant (4) de (3), il restera

$$dh+egh+h^2+dk+egk-k^2=0:$$

divisant par $h+k$, le quotient sera

$$d+eg+h-k=0;$$

si on le multiplie par h, et qu'on retranche le produit de (3), il viendra

$$-cfg+cg^2+hk=0;$$

d'où l'on déduit

$$c=\frac{hk}{fg-g^2},$$

ensorte que

$$a=0,\ b=-\frac{fhk}{g(f-g)},\ c=\frac{hk}{g(f-g)},\ e=\frac{k-h-d}{g}.$$

Nous déterminerons le dernier coëfficient d, d'après la condition que la section conique touche la droite AF en A. L'équation de la droite AF, rapportée à l'origine A et aux axes de la courbe, est

$$y=mx,$$

en observant que

$$m=\frac{y}{x}=\frac{HF}{AH}=\frac{p}{g},$$

et faisant $HF = p$: si l'on substitue cette valeur de y dans (N), l'équation résultante donnera les abscises x des intersections de la section conique et de la droite, et on aura, après les réductions,

$$x = 0,\ x = -\frac{(dm - cf)}{c + em + m^2};$$

mais la droite deviendra tangente en A, si le second point d'intersection vient se réunir au point A (chap. 87), qui a pour abscisse $x = 0$; il faut donc que l'on ait

$$x = -\frac{(dm - cf)}{c + em + m^2} = 0;\ \text{donc}\ dm - cf = 0,$$

et de là on déduit

$$d = \frac{cf}{m} = \frac{cfg}{p} = \frac{fh}{p(f-g)}.$$

Tous les coefficiens a, b, c, d, e étant ainsi connus, on peut construire la section conique par points.

2°. Supposons enfin que l'on *donne les trois points* A, B *et* C, *et la position de deux droites qui doivent être touchées, dans les points* A *et* C, *par la section conique qui passe par* A, B *et* C. Fig. 69.

En conservant les désignations ci-dessus des coordonnées de A, B et C, on sera conduit aux équations

$$a = 0,\ b = -cf,\ -cfg + cg^2 + dh + egh + h^2 = 0;$$

Pour simplifier cette analyse, nous prendrons la ligne AT elle-même, pour axe des ordonnées; elle aura donc pour équation $x = 0$, et les ordonnées es intersections de cette droite avec la courbe, seront

$$y = 0,\ y = -d,$$

et conséquemment $d = 0$ sera la condition sous laquelle AT touchera la courbe en A : ainsi les trois équations précédemment obtenues deviendront

$$a = 0,\ b = -cf,\ -cfg + g^2 + egh + h^2 = 0.$$

La section conique doit toucher en C la ligne CT, qui a pour équation

$$y = -\frac{gx}{f} + g;$$

écrivant cette valeur de y dans

$$bx + x^2 + cxy + y^2 = 0,$$

on aura ces deux abscises des intersections de la courbe et de la droite,

$$x = \frac{-(-cf^3 - egf^2 - 2g^2f) \pm (cf^3 - egf^2)}{2(g^2 - egf + cf^2)}.$$

Pour dire que les deux points se réunissent en un seul, il faudra poser

$$cf^3 - cf^2 = 0, \text{ d'où } e = \frac{cf}{g};$$

par cette valeur de e celles de x deviennent égales, et chacune d'elles est

$$x = f = AC,$$

ce qui doit arriver. La section conique, assujétie aux conditions énoncées, a donc pour équation

$$cfx = cx^2 + \frac{cf}{g}xy + y^2.$$

3°. *Si l'on suppose qu'une ligne tourne sans cesser d'être tangente à un cercle donné, et de manière que le point de contact reste le même sur la tangente, en variant de position sur le cercle, trouver la courbe que décrit dans ce mouvement un point donné sur la tangente.*

Soient x'', y'' les coordonnées variables du point de tangence; x', y' celles du point pris sur la tangente : en observant que le point x', y' est sur la tangente, et que la portion de cette tangente comprise entre les points x'', y'', x', y' est

constante d'après l'énoncé, on a ces trois équations,

$$y''^2 + x''^2 = R^2,$$
$$y'y'' + x'x'' = R^2,$$
$$(y'' - y')^2 + (x'' - x)^2 = m^2.$$

Si de la première on retranche le double de la seconde, et qu'on ajoute de part et d'autre $y'^2 - x'^2$, on trouve

$$(y'' - y')^2 + (x'' - x')^2 = -R^2 + y'^2 + x'^2;$$

et d'après la troisième,

$$m^2 = -R^2 + y'^2 + x'^2,$$

ou

$$y'^2 + x'^2 = R^2 + m^2,$$

équation d'un cercle dont le rayon $= \sqrt{R^2 + m^2}$.

Il est bon d'observer que c'est par l'élimination des coordonnées x'', y'' du point de contact qu'on rend arbitraire la position de la tangente, et qu'on exprime l'une des conditions de l'énoncé.

4°. *Trouver sur l'ellipse un point de tangence tel, que la tangente prolongée jusqu'à la rencontre des axes, soit divisée en ce point, dans le rapport de* m à n.

Désignons par x'', y'' les coordonnées inconnues CP'', $P''M''$ du point de tangence : on aura, d'après l'énoncé, Fig. 67.

$$m : n :: TP'' : P''C :$$

or TP'' est la sous-tangente dont on a l'expression en x''; de cette équation et de celle de la courbe, énoncée en x'', y'', on déduira les coordonnées du point cherché.

5°. *Trouver le point de l'ellipse pour lequel la normale soit égale à une ligne donnée.*

Si on désigne par n la longueur de la normale; on aura pour calculer les coordonnées x'', y'' du point cherché, les deux équations

$$A^2B^2 = A^2y''^2 + B^2x''^2,$$

$$n^2 = y''^2 + \frac{B^4}{A^4}x''^2,$$

CHAPITRE XII.

Du Cercle.

96. Nous rechercherons d'abord l'équation la plus générale du cercle, c'est-à-dire, l'expression analytique de la loi de génération de cette courbe.

Soient donc AX, AY les axes rectangulaires auxquels on rapporte la position des points de la courbe ; x, y, les coordonnées d'une position quelconque du point décrivant M, x', y' celles du point fixe C : la distance constante de ces deux points sera, en désignant le rayon par r,

Fig. 70. $$r^2 = \overline{pM}^2 + \overline{pC}^2 = (MP - CP')^2 + (AP - AP')^2,$$

et conséquemment

$$r^2 = (y - y')^2 + (x - x')^2 \ldots\ldots (1).$$

Telle est l'équation de la circonférence d'un cercle, décrite du point x', y' comme centre avec le rayon r.

Soit $x' = r$, ou $CQ = CR$: l'axe des y touchera le cercle au point R, et l'équation prendra cette forme plus simple,

$$y^2 - 2y'y + x^2 - 2rx + y'^2 = 0 \ldots\ldots (2).$$

Si l'on suppose en même temps, $y' = r$, c'est-à-dire, $CP' = CR'$, l'axe AX sera à son tour tangent au cercle en R', et on aura pour équation

$$y^2 - 2ry + x^2 - 2rx + r^2 = 0 \ldots\ldots (3).$$

Mais si l'axe AY étant toujours tangent en R, l'axe AX passe par le centre, alors $y' = 0$, et l'équation (2) prend la forme

$$y^2 + x^2 - 2rx = 0 \ldots\ldots (4).$$

Enfin, si les deux axes passent par le centre, $x' = 0, y' = 0$, et l'équation se réduit à la suivante,

$$y^2 + x^2 = r^2 \ldots\ldots (5),$$

remarquable par sa symétrie et sa simplicité : c'est celle dont on se sert plus fréquemment.

97. De l'équation générale (1), on déduit cette conséquence : *Trois conditions non identiques, comme trois points non en ligne droite, déterminent une circonférence de cercle de grandeur et de position.* En effet, dans cette question, les coordonnées du centre et le rayon de ce cercle sont indéterminés, et l'équation (1) pouvant être mise sous la forme

$$y^2 + x^2 + Ay + Bx + C = 0,$$

on a pour évaluer A, B, C, les trois conditions distinctes

$$\begin{aligned} y'^2 + x'^2 + Ay' + Bx' + C &= 0, \\ y''^2 + x''^2 + Ay'' + Bx'' + C &= 0, \\ y'''^2 + x'''^2 + Ay''' + Bx''' + C &= 0, \end{aligned}$$

x', y' ; x'', y'' ; x''', y''' étant les coordonnées des points donnés.

98. Passons à la solution de quelques questions.

1°. *Un point étant donné à l'égard de deux axes perpendiculaires entre eux, déterminer le lieu des centres de tous les cercles assujétis à passer par ce point et à être tangens à l'un des axes.*

Soient x', y' les coordonnées du point M donné, x, y Fig. 71.
celles du centre, et r le rayon : il s'agit de déduire des deux conditions énoncées une relation entre les coordonnées variables x, y. Puisqu'il s'agit d'un cercle passant par un point x',

y', dont le centre est x, y, et qui a pour rayon r, on aura l'équation

$$(y'-y)^2+(x'-x)^2=r^2;$$

mais ce cercle devant toucher l'axe AY, on a $CR=x=r$; donc

$$(y'-y)^2+(x'-x)^2=x^2;$$

et faisant les opérations indiquées et les réductions,

$$y^2-2y'y-2x'x+y'^2+x'^2=0.$$

La courbe de cette équation est du genre parabolique, parce que le terme du rectangle et celui de x^2 manquant à la fois, on a le caractère $B^2-4AC=0$: la parabole est donc le lieu des centres des cercles qui jouissent de la propriété énoncée.

Lorsque l'axe des abscisses passe par le point donné, on a $y'=0$, et l'équation précédente se simplifie et devient

$$y^2=2x'x-x'^2.$$

Pour $y=0$, on trouve $x=\frac{x'}{2}=A'S$; si donc on suppose

$$x=\frac{x'}{2}+X=A'S+SP,$$

on trouvera

$$y^2=2x'X,$$

et le sommet de la parabole sera en S : si dans la première équation, on fait $x<\frac{x'}{2}$, les ordonnées y deviennent imaginaires, et pour $x=x'=A'M$, on a

$$y=\pm x':$$

prenant donc $MR=MR'=x'$, les points R et R' seront à la parabole : ainsi on aura trois points R, S, R' de cette courbe.

2°. *Trouver les coordonnées des intersections successives de deux droites assujeties chacune à passer par un point donné, et à se rencontrer sous un angle donné et constant.*

Soit m la tangente de l'angle donné, et, pour simplifier les calculs, prenons les points donnés sur l'axe des abscisses, et l'un d'eux à l'origine. L'équation de AM est [Fig. 72.]

$$y = ax,$$

celle de MC,

$$y = a'(x - x'),$$

x' étant AC; on aura

$$m = \frac{-a' - a}{1 - aa'},$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{m + a'}{ma' - 1}.$$

Si l'on substitue cette valeur de a dans l'équation de AM, il viendra

$$y = \frac{m + a'}{ma' - 1} x.$$

Qu'on élimine a' au moyen de cette équation et de celle de la droite CM, et on parviendra à une relation entre les seules coordonnées x et y des points pour lesquels la tangente de l'angle entre les deux lignes, est m : le résultat de cette élimination est

$$y^2 + x^2 - x'x - \frac{x'y}{m} = 0.$$

Lorsque l'angle des deux lignes est droit, $m = \infty$, et la relation précédente se simplifie et devient

$$y^2 + x^2 - x'x = 0.$$

Ces deux équations sont celles d'un cercle dont tous les points

considérés comme sommets d'angles qui s'appuient sur AC comme corde ou comme diamètre, jouissent en effet de la propriété énoncée.

3°. *Trois cercles inégaux étant donnés de grandeur et de position sur un plan, si en les considérant deux à deux, on leur mène des tangentes extérieures jusqu'à ce qu'elles se coupent, les trois points d'intersection qu'on obtiendra de cette manière, seront en ligne droite.*

Nous prendrons pour axe des abscisses la ligne qui passe par deux des trois centres, par A et C, par exemple. On sait que Fig. 73. cette ligne passe anssi par le point de concours R de la tangente TT' à ces deux cercles.

R'', R' étant les points de rencontre avec la ligne des centres des tangentes aux cercles B et C, B et A, tout se réduit à faire voir que la ligne $R'R''$ prolongée va concourir en R: c'est à cette conclusion que l'analyse va nous conduire.

Posons à cet effet

$$AB = m,$$
$$BC = n,\ AR' = l',\ BAC = \alpha,\ AM' = x',\ AM'' = x'',$$
$$AC = p,\ CR'' = l'',\ BCR = \alpha',\ M'R' = y',\ M''R'' = y''.$$

on aura d'abord

$$AM' = x' = l' \cos\alpha;\ M'R' = y' = l' \sin\alpha \qquad AM'' = p - l'' \cos\alpha' = x''.$$
$$CM'' = -l'' \cos\alpha',\ M''R'' = l'' \sin\alpha'$$

L'équation d'une ligne assujétie à passer par deux points dont les coordonnées sont x', y'; x'', y'', est

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

Si on remplace dans cette formule x', y' par les coordonnées du point R', qui sont $-x'$, $-y'$, parce que R' est au-des-

sous de l'axe des x, et à gauche de celui des y; y'', x'' par $-y''$, x'', on trouvera

$$y+y'=\frac{-y'+y''}{-x'-x''}(x+x')\ldots(M),$$

pour équation de la droite $R'R''$. Pour avoir l'abscisse du point de concours de cette droite avec l'axe des abscisses qui a pour équation

$$y=0\ldots\ldots(N),$$

on posera $y=0$ dans (M), et on tirera

$$x=\frac{x''y'+x'y''}{y'-y''}\ldots\ldots(P),$$

abscisse du point R, intersection de AX et de $R'R''$. Remplaçant dans (P) x', y'; x'', y'' par leurs valeurs relatées plus haut, on obtient

$$x=\frac{l'l''(\sin\alpha'\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha')+pl'\sin\alpha}{l'\sin\alpha-l''\sin\alpha'}\ldots\ldots(Q).$$

Or des triangles ABC, ABH, BCH, BH étant perpendiculaire sur AC, on déduit

$$\sin\alpha=\frac{n\sin\alpha'}{m},\ \cos\alpha=\frac{AH}{m},\ \cos\alpha'=-\frac{CH}{n}.$$

Substituant dans (Q), on obtient cette expression très-simple de x,

$$x=\frac{l'l''(AH+CH)+nl'p}{ln-l'm}=\frac{(l'l''+nl')p}{l'n-l\,m}\ldots(R),$$

à cause de $AH+CH=p$. Mais on a vu en géométrie que

$$l'=AR'=\frac{mr'}{r-r'};\ l''=CR''=\frac{nr''}{r-r''},$$

r, r', r'' étant les rayons des cercles B, A, C : par ces substitutions, (R) devient

$$x = AR = \frac{pr'}{r' - r''};$$

et retranchant p de part et d'autre pour avoir CR, on trouve

$$x - p = CR = \frac{pr''}{r' - r''},$$

qui est effectivement la distance du centre C au point de concours de la ligne des centres AC et de la tangente TT'. Donc les trois points de concours sont sur une même droite, proposition que j'ai démontrée dans les Réciproques, par la seule Géométrie.

Supposons $r' = r''$, alors la distance AR est infinie; d'où l'on conclut que la ligne qui joint les centres des cercles égaux, est parallèle à la droite $R'R''$, qui passe par les concours des tangentes aux cercles inégaux, proposition curieuse qu'on peut s'exercer à démontrer.

4°. *Si aux trois mêmes cercles pris deux à deux, on mène des tangentes intérieures, comme* tt', *ces tangentes rencontreront les lignes des centres en des points* a', b' *et* c', *et il arrive que les points* c', a', R ; a', b', R' ; c', b', R'', *sont en ligne droite.*

Fig. 73. Il suffira de démontrer la proposition à l'égard des trois points c', a', R.

Soient x', y' les coordonnées de c', x'', y'' celles de a' ; on aura, en conservant les dénominations employées dans le problème précédent,

$$x' = \frac{mr'}{r + r'} \cos\alpha, \; y' = \frac{mr'}{r + r'} \sin\alpha, \; Ac' = l' = \frac{mr'}{r + r'};$$

$$x'' = p + \frac{nr''}{r + r''} \cos\alpha'; \; y'' = \frac{nr''}{r + r''} \sin\alpha'; \; Ca' = l'' = \frac{nr''}{r + r''};$$

et l'équation de la ligne qui passe par les points x', y'; x'', y'' sera

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x') :$$

pour avoir l'abscisse du point dans lequel elle coupe l'axe AX, on posera $y = 0$, d'où résulte

$$x = \frac{y'x'' - x'y''}{y' - y''} :$$

substituant les valeurs précédentes, cette expression devient

$$x = \frac{-l'l''(\sin\alpha' \cos\alpha - \sin\alpha \cos\alpha') + pl' \sin\alpha}{l' \sin\alpha - l'' \sin\alpha}$$

$$= \frac{(-l'l'' + nl')p}{l'n - l''m} = \frac{pr'}{r' - r''},$$

même abscisse que celle du point R, dans le problème précédent. En répétant cette analyse à l'égard des points a', b', c', b'; on trouverait une même conclusion à l'égard de a', b', R'; c', b', R''; et pour mieux saisir l'analogie, on peut supposer qu'on ait pris successivement dans ces deux problèmes, chacune des lignes des centres BA et BC pour axe des abscisses. On pourra prouver par l'analyse que les trois lignes Aa', Bb', Cc' se croisent en un même point.

5°. *Etant donnés tant de points qu'on voudra* A', A'', A''' *etc., trouver un point* M. *tel que la somme des carrés de ses distances à chacun des autres, soit un carré donné.*

Supposons, pour simplifier les calculs, que les points donnés soient au nombre de trois, restriction qui ne diminue en rien la généralité de la solution. Désignons par Fig. 74

$$x', y'; \quad x'', y''; \quad x''', y'''; x, y;$$

les coordonnées des points

$$A', \quad A'', \quad A'''; \quad M;$$

Si l'on développe ces équations, et que l'on égale la somme des seconds membres à q^2, on aura, après avoir divisé par 3,

$$y^2 - \tfrac{2}{3}(y' + y'' + y''')y - \tfrac{2}{3}(x' + x'' + x''')x + x^2 = \frac{q^2 - \{x'^2 + x''^2 + x'''^2 + y'^2 + y''^2 + y'''^2\}}{3}.$$

Si, pour simplifier ce résultat, on fait

$$x = X + \frac{x' + x'' + x'''}{3}, \quad y = Y + \frac{y' + y'' + y'''}{3},$$

la transformée ne renfermera plus dans le premier membre, que les secondes puissances des variables, multipliées chacune par l'unité ; et le second membre se composera de quantités connues ; de sorte qu'elle aura la forme

$$Y^2 + X^2 = R^2.$$

Le lieu des points M est donc la circonférence d'un cercle.

CHAPITRE XIII.

Propriétés de l'Ellipse.

99. NOUS avons trouvé pour équation de cette courbe rapportée au centre et aux axes (pag. 99)

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,$$

et pour celle de la même courbe rapportée au sommet comme origine et à deux axes rectangulaires, l'un symétrique dans la courbe, et l'autre qui la touche au sommet. (*idem.*)

$$A^2y^2 + B^2x^2 = 2AB^2x.$$

La première donne

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2);$$

mais pour deux points de la courbe dont les coordonnées sont x', y' ; x'', y'', on a ces deux relations

$$y'^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x'^2);\ y''^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x''^2),$$

desquelles on déduit le rapport

$$\frac{y'^2}{y''^2} = \frac{(A - x')(A + x')}{(A - x'')(A + x'')},$$

et cette conséquence : *les carrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des distances des pieds de ces ordonnées*

aux sommets de la courbe. Cette propriété est indépendante du second axe ; et, en effet, elle a lieu pour le cercle.

Fig. 75. 100. L'équation de l'ellipse, rapportée au centre et aux axes, peut être mise sous ces deux formes

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2), \quad x^2 = \frac{A^2}{B^2}(B^2 - y^2).$$

Si du point C comme centre, avec $CA = A$, comme rayon, on décrit une circonférence, et que du même centre avec le rayon CB, on en décrive une autre, je dis que, pour $A > B$, tous les points de l'ellipse seront intérieurs à la première circonférence, et extérieurs à l'autre. En effet, la première circonférence rapportée à CA comme axe des abscisses, aura pour équation

$$Y^2 = A^2 - x^2,$$

et la seconde, en prenant les y pour abscisses, sera représentée par

$$X^2 = B^2 - y^2;$$

On a donc les rapports

$$\frac{y^2}{Y^2} = \frac{B^2}{A^2}, \quad \frac{x^2}{X^2} = \frac{A^2}{B^2}, \text{ ou } \frac{y}{Y} = \frac{B}{A}, \quad \frac{x}{X} = \frac{A}{B},$$

desquels on conclut

$$y < Y, \quad x > X;$$

la première relation ayant lieu pour toute abscisse x commune aux deux courbes, et la seconde supposant même abscisse y.

101. *Etant donné le centre d'une ellipse, trouver les deux axes.*

Fig. 75. Il résulte de l'équation de l'ellipse rapportée au centre et aux axes, que, pour deux abscisses CP, CP' égales et de signes contraires, on a quatre ordonnées PM, Pm; $P'M'$, $P'm'$ égales, et deux à deux de signes contraires; donc $CM = CM' = Cm' = Cm$; donc la circonférence décrite du centre C avec un rayon CM pris arbitrairement, passera par les quatre points

M, M', m', m; joignant les points M' et M, M et m, les perpendiculaires menées du centre sur ces cordes, et prolongées jusqu'à l'ellipse, seront les axes cherchés. On reconnaitra que le rayon est lui-même l'un des demi-axes, si la circonférence est inscrite ou circonscrite. On a appris (74) à trouver le centre.

102. Si par deux points p et p' pris sur l'axe AA' à des distances égales du centre, on mène deux droites pM, $p'M$, on aura pour l'équation de pM Fig. 76.

$$y = \alpha(x - x'),$$

pour celle de $p'M$,

$$y = \alpha'(x + x'),$$

en désignant par x' l'abscisse $Cp = Cp'$. Si l'on multiplie ces deux équations l'une par l'autre, et qu'on pose

$$\alpha\alpha'(x^2 - x'^2) = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2),$$

on dira que les deux droites se coupent sur un point de l'ellipse, et on déduira de cette condition,

$$\alpha\alpha' = -\frac{B^2}{A^2}\left(\frac{A^2 - x^2}{x'^2 - x^2}\right),$$

Or x'^2 étant $< A^2$, on a $\alpha\alpha' > -\frac{B^2}{A^2}$, et pour $x' = A$, on trouve

$$\alpha\alpha' = -\frac{B^2}{A^2},$$

ce qui établit une relation constante entre les angles que forment avec le grand axe, les cordes AM, $A'M$ menées de ses extrémités en un même point de l'ellipse. Dans le cercle qui est une ellipse dont les deux axes sont égaux,

$$\alpha\alpha' = -1, \text{ d'où } \alpha\alpha' + 1 = 0,$$

et les cordes *supplémentaires* s'y coupent à angle droit, comme on le sait, par la géométrie.

103. Nous avons vu que tous les points d'une circonférence AmA' décrite sur le grand axe d'une ellipse, comme diamètre, étaient extérieurs à l'ellipse; donc l'angle AmA' étant droit, l'angle $AMA' > AmA'$, est obtus. Tous les points d'une circonférence décrite sur le petit axe, étant intérieurs à l'ellipse, tout angle qui, s'appuyant sur le petit axe, à son sommet sur l'ellipse, est aigu, comme plus petit qu'un droit.

Fig. 75.

L'analyse fournit le moyen de démontrer, 1°. *que de tous les angles inscrits à l'ellipse, et qui s'appuient sur le grand axe, le plus grand est celui qui a son sommet à l'extrémité du second axe;* 2°. *que celui qui, s'appuyant sur le petit axe, à son sommet à l'extrémité du grand axe, est le minimum parmi tous les angles analogues;* 3°. *que l'angle maximum a pour supplément l'angle minimum.*

1°. L'équation de la ligne AM, est

$$y = \alpha(x - A), \text{ d'où } \alpha = \frac{y}{x-A} = \text{tang } MAX;$$

celle de $A'M$

Fig. 76.

$$y = \alpha'(x + A), \text{ d'où } \alpha' = \frac{y}{x+A} = \text{tang } MA'X;$$

mais

$$\text{tang } AMA' = \text{tang } V = \frac{\alpha - \alpha'}{1 + \alpha\alpha'} = \frac{\frac{y}{x-A} - \frac{y}{x+A}}{1 + \frac{y^2}{x^2 - A^2}},$$

c'est-à-dire, après les réductions,

$$\text{tang } V = \frac{2Ay}{y^2 + x^2 - A^2};$$

mais en tant que les lignes doivent se couper sur l'ellipse, on a

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2).$$

Reportant cette valeur de y^2 dans tang V, l'expression de cette tangente pourra être mise sous la forme

$$\text{tang}\, V = -\frac{2AB}{(A^2-B^2)\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}};$$

Le signe — qui affecte la tangente, démontre, ce que l'on savait déjà, que l'angle est obtus : mais au plus grand angle obtus, correspond la plus petite tangente numérique, laquelle est donnée par la plus grande valeur du dénominateur, c'est-à-dire, par celle qui répond à $x = 0$, d'où résulte

$$\text{tang}\, V = -\frac{2AB}{A^2-B^2}.$$

Or si l'on mène les deux cordes $A'B$, AB, on a

$$\text{tang}\, A'BA = \frac{2.\text{tang}\, CBA}{1-\text{tang}^2\, CBA}.$$

Mais tang $CBA = \frac{A}{B}$; donc

$$\text{tang}\, A'BA = \frac{\frac{2A}{B}}{1-\frac{A^2}{B^2}} = -\frac{2AB}{A^2-B^2} \ldots\ldots (M);$$

le plus grand angle, parmi ceux que nous considérons, est donc l'angle ABA'.

2°. En imitant la même analyse pour le second axe, on trouvera que

$$\text{tang}\, V' = \frac{2AB}{A^2-B^2} \ldots\ldots (N)$$

est la tangente du plus petit des angles à l'ellipse, qui s'appuient sur cet axe, et que ce plus petit angle est celui qui a son sommet à l'extrémité du grand axe.

3°. Les deux tangentes (M) et (N) étant numériquement les mêmes, et différentes seulement par le signe, ces deux angles sont supplémens l'un de l'autre.

Fig. 76. 104. La propriété caractéristique du cercle, celle qui comprend toutes les autres, consiste en ce que les distances de tous ses points à son centre, sont égales entre elles; il est évident qu'elle n'a plus lieu dans l'ellipse par rapport à un centre unique; mais il serait assez naturel de rechercher s'il n'existe pas dans le plan de cette courbe, deux points qui, sans jouir chacun en particulier de cette propriété, en jouissent, pour ainsi dire, en commun. Prenons deux points F, F' sur le grand axe de l'ellipse, à égales distances du centre, cette distance étant inconnue, et menons de ces points à deux points M, M' de la courbe, les rayons FM, $F'M$; FM', $F'M'$; ces rayons seront inégaux, et de plus, l'un augmentera, quand l'autre diminuera : il s'agit donc de choisir ces centres d'après la condition que l'accroissement de l'un des rayons et la diminution de l'autre se compensent. Si l'on désigne par z le rayon FM, et par z' l'autre rayon $F'M'$, il faudra donc qu'on ait

$$(1)\ldots z = a - d,\ z' = a + d\ldots(2),$$

a étant une constante, et d une variable. Si l'on désigne par $2c$ la distance FF', et par x, y les coordonnées du point M, rapportées au centre C, on aura

$$z^2 = y^2 + (x-c)^2,\ z'^2 = y^2 + (x+c)^2,$$

ou

$$z^2 = B^2 + c^2 - 2cx + \frac{A^2 - B^2}{A^2}x^2,$$

$$z'^2 = B^2 + c^2 + 2cx + \frac{A^2 - B^2}{A^2}x^2;$$

d'où l'on déduit

$$z'^2 - z^2 = 4cx = (z' - z)(z' + z).$$

et conséquemment, à cause de $z' + z = 2a$, d'après (1) et (2); on a

$$z' - z = \frac{2cx}{a};$$

donc

$$(3)\ldots z' = a + \frac{cx}{a},\ z = a - \frac{cx}{a}\ldots(4):$$

on déduit de là

$$d = \frac{cx}{a}.$$

Il reste maintenant à déterminer a et c. Qu'on suppose le point M au point A, l'abscisse x devient A, $z = A - c$, et $z' = A + c$, ensorte que les valeurs (3) et (4) de z' et z deviennent

$$A + c = a + \frac{cA}{a},$$

$$A - c = a - \frac{cA}{a};$$

en ajoutant, on trouve

$$a = A\ldots(5)$$

Qu'on suppose le point M en B, ou à l'extrémité du second axe, et on aura

$$z^2 = B^2 + c^2;$$

mais comme alors l'abscisse x est nulle, et qu'ainsi les équations (3) et (4) donnent $z = z' = A$, l'égalité précédente devient

$$A^2 = B^2 + c^2,\ \text{d'où}\ c^2 = A^2 - B^2\ldots(6).$$

On a donc enfin, en reportant dans (3) et (4) ces déterminations de a et c,

$$(7)\ldots z' = A + \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A}x,\ z = A - \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A}x\ldots(8).$$

Il suit de l'équation (6), qu'il existe sur le grand axe et à des distances du centre, $= \pm\sqrt{A^2 - B^2}$, deux points tels que la somme de leurs distances à tout point de la courbe, est constante, et de plus égale au grand axe, puisqu'on a

$$z + z' = 2A :$$

on les déterminera en coupant l'axe des abscisses par des arcs de cercle, décrits de l'extrémité du petit axe, comme centre, avec le grand axe, comme rayon. Ces points se nomment *les foyers* de la courbe, et les distances z' et z se nomment *rayons vecteurs*. On observera que chacune de ces distances est exprimée d'une manière rationnelle, au moyen de l'abscisse x : c'est même d'après cette condition que nous déterminerons les foyers dans les deux autres courbes.

Comme A est $> B$, il n'existe pas de tels points sur le second axe.

Il sera maintenant facile de décrire l'ellipse par points : à cet effet, de l'un des foyers, et avec une distance plus petite que le grand axe, ayant tracé un arc, on le coupera par un second arc décrit de l'autre foyer, avec un rayon égal à la portion restante du grand axe : tous les points d'intersection, obtenus de cette manière, appartiendront à l'ellipse.

On peut aussi la décrire par le mouvement continu d'un piquet ou d'un style qui tend un cordeau égal en longueur au grand axe, et dont les extrémités sont fixées aux foyers, puisque, de cette manière, la somme des deux distances du point décrivant aux deux foyers, est partout égale au grand axe.

Fig. 76. 105. On peut encore employer le procédé de description qui suit, et qui est très-commode dans la pratique, lorsqu'il s'agit de petites ellipses. On donne les deux axes d'une ellipse, et conséquemment leur différence : soient $A'C$ le demi-grand axe $= A$, CB' le demi-petit axe $= B$, $A'G$ leur différence

$= A - B$: ayant placé, par exemple, les points A', G en E et F, on les fera mouvoir de manière qu'ils restent constamment sur les côtés CB', CA, et que le prolongement FM soit $= B$: alors le point M sera à l'ellipse. En effet

$$\overline{PM}^2 \text{ ou } y^2 = \overline{FM}^2 - \overline{FP}^2 = B^2 - (x - CF)^2;$$

Or les triangles semblables CFE, FPM donnent

$$CF : FE :: FP : FM, \text{ d'où } CF = \frac{A - B}{A} x,$$

et par la substitution dans y^2,

$$y^2 = B^2 - \frac{B^2 x^2}{A^2} = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2),$$

équation à l'ellipse. Lorsque le point E est en C, le point M est en A, parce qu'on a toujours

$$CF + FA = A - B + B = A.$$

Lorsque M est en B, et conséquemment F en C, on a

$$EC + CB = A - B + B;$$

donc $CB = B$. En répétant cette construction dans chacun des quatre angles droits, on décrit les quatre quarts de l'ellipse.

106. Pour trouver l'ordonnée qui répond au foyer de l'ellipse, on fera (104), dans l'équation de cette courbe, rapportée au sommet,

$$x = A - \sqrt{A^2 - B^2},$$

et on trouvera

$$y = \frac{B^2}{A} = p,$$

troisième proportionnelle au demi grand axe et au demi petit axe ; $2p$ est ce qu'on nomme le *paramètre* de la courbe, et parce que

$$\frac{2p}{2A} = \frac{B^2}{A^2},$$

on a ces équations au paramètre de l'ellipse rapportée au centre et à l'origine

$$y^2 = \frac{p}{A}(A^2 - x^2),\ y^2 = \frac{p}{A}(2Ax - x^2).$$

107. La propriété suivante donne lieu à la construction d'un instrument fort simple, au moyen duquel on décrira l'ellipse d'un mouvement continu.

Fig. 77. *Soit une règle* M″N″ *; si l'on joint l'origine* A *au point* M′, *milieu de* M″N″, *par une droite* AM′, *et qu'on fasse glisser le point* M″ *de* M″ *en* A *sur l'axe* AX, *le point* M′ *décrira la circonférence* BM′C, *et un point* M *de cette ligne décrira une ellipse.*

Faisons $M'M = a'$, prenons $AM' = M''M'$ et posons chacune de ces lignes $= a$; soient en outre, $AP = x$, $PM = y$, $AP' = X$, $P'M' = Y$: On aura pour tous les points la circonférence décrite par M'

$$Y^2 + X^2 = a^2;$$

mais les triangles semblables MPM'', $M'P'M''$, donnent

$$\frac{MP}{MM''} = \frac{M'P'}{M'M''},\ \text{ou}\ \frac{y}{a' + a} = \frac{Y}{a};$$

on a aussi ces rapports égaux

$$\frac{M''P'}{M''M'} = \frac{AP'}{M''M'} = \frac{M'\mu}{M'M},\ \text{ou}\ \frac{X}{a} = \frac{X - x}{a'}.$$

De ces deux relations on déduit celles-ci

$$Y = \frac{ay}{a' + a},\ X = \frac{ax}{a - a'};$$

substituant ces valeurs de Y et de X dans l'équation précédente,

on trouvera cette relation entre les coordonnées x et y des points m,

$$y^2 + \frac{(a+a')^2}{(a-a')^2}x^2 = (a+a')^2.$$

Si dans cette équation on fait $y = 0$, on aura l'abscisse x du point d'intersection de la courbe avec l'axe AX, laquelle sera

$$x = a - a' = B;$$

et l'ordonnée correspondante à $x = 0$, est celle du point dans lequel la courbe rencontre l'axe de y : on trouve

$$y = a + a' = A.$$

B est le demi-petit axe de l'ellipse, et A le demi-grand axe ; et on observera qu'il faut qu'on ait $a' < a$, ou $M'M < M'M''$. Il suit de là que si deux axes d'une ellipse, sont donnés, on trouvera les longueurs des deux règles a et a', telles que M'' décrivant une droite, le point M trace une ellipse sur ces axes : car des valeurs précédentes de B et A en a et a', on tire

$$a = \frac{A+B}{2},\ a' = \frac{A-B}{2}.$$

L'équation de la courbe énoncée en A et B, est donc

$$B^2y^2 + A^2x^2 = A^2B^2.$$

108. On peut aussi se proposer *de retrouver la courbe dont la somme des distances à deux points fixes connus de position, soit partout egale à une ligne donnee* 2A.

Soient F', F les deux points fixes ; joignons ces points par une droite, et prenons pour origine des coordonnées le milieu C de la droite $F'F$, portons enfin, de chaque côté de C, des longueurs $CA = CA' = A$. Soient $+c$, $-c$ les abscisses des points F et F', x, y les coordonnées d'un point quelconque M Fig. 78.

z' et z les distances $F'M$, FM; le point M étant à la courbe, on aura

$$F'M + FM = 2A, \text{ ou } z' + z = 2A;$$

mais

$$z = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},\ z' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

d'où

$$z^2 = (x-c)^2 + y^2,\ z'^2 = (x+c)^2 + y^2$$

et

$$z'^2 - z^2 = 4cx = (z' + z)(z' - z) = 2A(z' - z);$$

donc on a ces deux équations

$$z' + z = 2A,\ z' - z = \frac{2cx}{A},$$

desquelles on tire

$$z' = A + \frac{cx}{A},\ z = A - \frac{cx}{A};$$

Reportant ces valeurs dans l'équation

$$z'^2 + z^2 = 2y^2 + (x+c)^2 + (x-c)^2,$$

qu'on n'a pas employée, il viendra

$$A^2(y^2 + x^2) - c^2x^2 = A^2(A^2 - c^2).$$

Pour $x = 0$, on a l'ordonnée du point qui se trouve sur l'axe des y, c'est-à-dire, le demi-second axe B : on trouve donc

$$A^2B^2 = A^2(A^2 - c^2), \text{ d'où } c^2 = A^2 - B^2 :$$

reportant cette détermination dans l'équation précédente, le résultat de la substitution sera

$$A^2(y^2 + x^2) - (A^2 - B^2)x^2 = A^2B^2,$$

ou l'équation de l'ellipse

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2.$$

L'ellipse est donc la seule courbe qui jouisse de la propriété énoncée.

109. De cette propriété, que la somme des distances de tout point de l'ellipse aux deux foyers, est égale au grand axe, on déduit la description suivante de cette courbe, qui suppose les foyers et le grand axe.

Aux extrémités A et A' de l'axe AA', on élevera les perpendiculaires $AG = AF$, $A'L = A'F$: par les points G et L on mènera une droite GL qui rencontrera en R le prolongement de l'axe. Par des points O, O et O, etc. pris comme l'on voudra sur le grand axe, on élevera les perpendiculaires OD, OD etc. terminées à la ligne GL: du point F, comme centre, avec chacune des lignes OD, comme rayon, on décrira des arcs de cercle qui couperont les perpendiculaires OD en des points P qui seront à l'ellipse. Fig. 79.

Si sur GA prolongée on prend $Al = A'L$, et sur LA' aussi prolongée, une partie $A'g = AG$, après avoir tiré lg, qui rencontre l'axe prolongé en r, il est aisé de voir qu'au moyen du foyer F' et des perpendiculaires Od, on achevera l'ellipse.

Nous avons donc à démontrer que les points P et p sont à l'ellipse. En effet, les droites Gl, gL sont égales et parallèles, ensorte que la figure $lGLg$ est un parallélogramme; de plus, à cause de $AG = AF$, $Al = A'L = A'F$, on a $AG + Al = AA'$. Chaque point P est éloigné du foyer F' d'une quantité OD, et parce qu'il peut encore être déterminé, en coupant chaque ligne OD par un arc de cercle décrit de F', comme centre, avec le prolongement Od, comme rayon, on a $PF + PF' = OD + Od = lG = AA'$, propriété qui, comme nous l'avons observé, caractérise l'ellipse et ne caractérise que cette courbe.

On remarquera que les lignes RL, rl sont tangentes à l'ellipse aux points M et m, où les perpendiculaires menées par les foyers, rencontrent ces lignes.

110. Aux données d'une abscisse et de l'ordonnée correspondante, on peut substituer celles d'un rayon vecteur et de l'angle qu'il fait avec l'axe des abscisses, la première tenant lieu d'ordonnée, et la seconde d'abscisse. La relation entre ces quan-

tités pour tous les points de l'ellipse, est ce qu'on nomme son *équation polaire*.

Fig. 80. Désignons par c l'abscisse CF du foyer F, le rayon vecteur FM par z, l'angle MFA par φ; nous aurons

$$y = z \sin \varphi, \quad x = c + z \cos \varphi.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation de l'ellipse au centre, donnera, après avoir remplacé $\sin^2\varphi$ par $1 - \cos^2\varphi$, et $A^2 - B^2$ par c^2,

$$A^2 z^2 = (B^2 - cz \cos \varphi)^2,$$

d'où l'on déduit

$$z = \frac{B^2}{A + c \cos \varphi}.$$

Lorsque le point M est en A, $\cos \varphi = 1$, et

$$z = \frac{B^2}{A + c} = \frac{B^2 (A - c)}{A^2 - c^2} = A - c = AF;$$

lorsque le point M est en A', $\cos \varphi = -1$, et

$$z = \frac{B^2}{A - c} = \frac{B^2 (A + c)}{A^2 - c^2} = A + c = A'F.$$

Nous observerons que les lignes telles que FM, qui tournent autour d'un point, ne prennent pas de signe.

Nous avons aussi trouvé (104 et 108) cette valeur du rayon vecteur

$$z = A - \frac{cx}{A},$$

c étant la distance du centre au foyer, distance qu'on nomme *excentricité*: remplaçant x par la valeur trouvée plus haut $z \cos \varphi + c$, on aura

$$z = \frac{A (1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi},$$

en supposant, pour abréger, $e = \frac{c}{A}$ = le rapport de l'excentricité au demi grand axe.

Menons par le foyer F, et sous un angle quelconque θ avec le grand axe, une droite $A''A''$; et nommons u l'angle du rayon vecteur avec cette ligne, φ sera $= u - \theta$: l'équation précédente deviendra donc Fig. 80.

$$\frac{1}{z} = \frac{1 + e\cos(u-\theta)}{A(1-e^2)};$$

c'est celle de l'ellipse rapportée à un axe mené par le foyer.

111. Nous avons trouvé (91) cette expression de la soutangente de l'ellipse $\frac{x''^2 - A^2}{x''}$, ou $-\frac{A^2 - x''^2}{x''}$ à cause de $A > x''$; comme cette ligne suit le sens des abscisses, nous conviendrons de lui donner le signe de l'abscisse x'', ensorte que ce signe sera l'opposé de celui de la tangente a. Nous ferons donc

$$TP = \frac{A^2 - x''^2}{x''}$$ Fig. 81.

cette expression étant indépendante du second axe, reste donc la même pour $B = A$; ainsi l'ellipse et le cercle décrits sur son grand axe, ont même soutangente pour une même abscisse. De là résulte un procédé fort simple pour mener une tangente à l'ellipse par un point M donné sur cette courbe : on mènera l'ordonnée de ce point, prolongée jusqu'à la rencontre de la circonférence en m, le rayon Cm, et la perpendiculaire mT; joignant les points T et M, la ligne TM sera la tangente cherchée.

112. Nous avons trouvé (91)

$$a = -\frac{B^2}{A^2}\frac{x''}{y''}$$

pour tangente de l'angle fait avec l'axe des abscisses par la ligne qui touche l'ellipse au point x'', y'', l'origine étant au centre : Fig. 81.
aux extrémités du grand axe, on a $y'' = 0$, d'où résulte $a = \infty$; l'ellipse tombe donc en A et A' perpendiculairement sur le grand axe, parce qu'en considérant la courbe comme un

polygone d'une infinité de côtés, la tangente peut être regardée comme le prolongement d'un de ces élémens. Pour $x'' = 0$, le point de tangente est à l'extrémité du petit axe, $a = 0$; donc l'élément correspondant est parallèle au grand axe. On peut mettre la valeur de a sous la forme

$$a = -\frac{B^2 x''}{A^2\left(\frac{B}{A}\sqrt{A^2 - x''^2}\right)} = -\frac{B^2}{BA\sqrt{\frac{A^2}{x''^2} - 1}} :$$

$$= -\frac{B}{A\sqrt{\frac{A^2}{x''^2} - 1}}.$$

or x'' diminuant depuis $x'' = A$ jusqu'à $x'' = 0$, le dénominateur de a augmente, la fraction diminue; l'inclinaison des élémens de l'ellipse sur l'axe des abscisses, va donc en diminuant depuis le sommet de la courbe, jusqu'à l'extrémité du demi-second axe. On remarquera que la tangente a est négative pour des abscisses x'' positives, et positive pour des abscisses négatives (111), ce qui doit être, puisque a exprime la tangente de l'angle MTX.

On trouvera facilement que les coordonnées du point pour lequel $a = 1$, sont

$$x'' = \pm\frac{A^2}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \; y'' = \pm\frac{B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Pour le cercle, elles deviennent

$$x'' = y'' = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

113. De l'équation de la tangente (91), on déduit pour Fig. 81. celle de la normale NM,

$$y - y'' = \frac{A^2 y''}{B^2 x''}(x - x'');$$

et faisant $y = 0$ pour avoir l'abscisse CN, on trouve

$$CN = \frac{A^2 - B^2}{A^2} x'';$$

pour $x'' = A$, on a la plus grande valeur de CN, savoir,

$$CN = \frac{A^2 - B^2}{A} = \frac{\overline{CF}^2}{AC} = \frac{CF}{AC}\ CF;$$

donc, à cause de $CF < AC$, on a $CN < CF$; ce qui montre que l'extrémité de la normale au point A, tombe entre le foyer et le centre, et d'ailleurs de l'expression de la sous-normale considérée, abstraction faite du signe (91), qui est

$$PN = \frac{B^2}{A^2} x'',$$

on déduit, pour $x'' = A$, cette valeur de CN,

$$CN = \frac{B^2}{A},$$

qui apprend que cette ligne est égale à la moitié du paramètre (106). Pour $x'' = 0$, on trouve $CN = 0$; donc la normale coupe toujours le grand axe entre le centre et un point situé à une distance de ce centre, égale au demi-paramètre, lequel est placé entre le centre et le foyer.

114. La droite menée par le centre et le point de tangence x'', y'', a pour équation

$$y = \frac{y''}{x''} x, \text{ d'où } a' = \frac{y''}{x''};$$

et l'inclinaison de la tangente au point x'', y'', sur l'axe des abscisses, a pour tangente

$$a = -\frac{B^2}{A^2} \frac{x''}{y''};$$

multipliant l'une par l'autre ces deux égalités, on cette relation

$$aa' = -\frac{B^2}{A^2};$$

mais on sait déjà (102) que les tangentes trigonométriques des angles de deux cordes menées des extrémités du grand axe à un point quelconque de la courbe, satisfont à la relation

$$aa' = -\frac{B^2}{A^2};$$

Fig 76. donc si la corde $A'M$ est parallèle au demi-diamètre CM', la corde supplémentaire AM le sera à la tangente TM'. De là résulte cet autre procédé pour mener une tangente en un point donné d'une ellipse : *on tirera le demi-diamètre du point de tangence, puis de l'extrémité du grand axe opposée au point de tangence, une corde parallèle à ce diamètre, la corde supplémentaire, et par le point de tangence, une parallèle à celle-ci, laquelle sera la tangente.*

Mais si sur la ligne $CT = n.2A$ comme grand axe, et sur
Fig. 82. $n.2B$ comme second axe, on construit une ellipse, cette courbe passera nécessairement par M', puisque pour les cordes menées en ce point, des extrémités C et T de son grand axe, on a la relation

$$aa' = -\frac{n^2.B^2}{n^2.A^2} = -\frac{B^2}{A^2}.$$

Si par le centre C' de la seconde ellipse, on mène une parallèle $C'M''$ à CM', puis par M'' une tangente $M''T''$, le point M'' sera sur une troisième ellipse ayant des axes qui sont proportionnels à ceux de la seconde. Toutes les tangentes aux points d'intersection, consécutifs de ces ellipses, sont parallèles entre elles.

115. Ce que nous venons de dire suppose 1°. que si deux droites menées des extrémités du grand axe, satisfont par leurs tangentes trigonométriques à la relation $aa' = -\frac{B^2}{A^2}$, elles se couperont en un point de l'ellipse ; 2°. que dans celle-ci $aa' = -\frac{B^2}{A^2}$, a' étant la tangente de l'angle fait avec l'axe

des abscisses, par une ligne menée du centre au point de tangence, α est celle de l'inclinaison de la tangente sur le même axe. Posons, dans le premier cas,

$$\alpha\alpha' = -\frac{B^2}{A^2}, \text{ d'où } \alpha' = -\frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{1}{\alpha}.$$

l'équation de l'une des droites étant

$$y = \alpha(x - A),$$

et celle de l'autre

$$y = \alpha'(x + A) = -\frac{B^2}{A^2}\frac{1}{\alpha}(x + A),$$

leur produit donnera

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2),$$

équation de l'ellipse. Dans le second cas, on a

$$\alpha' = \frac{y''}{x''}, \text{ d'où } \alpha = -\frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{1}{\alpha'} = -\frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{x''}{y''};$$

et conséquemment l'équation de la droite assujétie à passer par le point de tangence x'', y'', et à faire avec l'axe des abscisses un angle donné par la tangente α, sera

$$y - y'' = -\frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{x''}{y''}(x - x'');$$

et réduisant

$$A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2y''y + B^2x''x = A^2B^2,$$

équation de la tangente au point x'', y''.

116. *Les deux rayons vecteurs menés au point de tangence, font avec la partie de cette tangente, située du même côté, des angles égaux.*

Si du foyer F pour lequel

$$y' = 0,\ x' = c = \sqrt{A^2 - B^2}$$

on mène une droite au point M' de tangence donné par x'', y'', on aura pour tangente de l'angle $M'FT$, qu'elle fait avec l'axe des x,

Fig. 76.
$$\alpha = \frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{y''}{c - x''}.$$

Mais la tangente de l'angle $M'TX$, est

$$a = -\frac{B^2}{A^2} \cdot \frac{x''}{y''};$$

donc l'angle $FM'T = M'TX - M'FX$, aura pour tangente

$$\text{tang } V = \frac{a - \alpha}{1 + a\alpha} = \frac{A^2y''^2 + B^2x''^2 - B^2cx''}{A^2cy'' - (A^2 - B^2)x''y''};$$

mais le point donné étant sur l'ellipse,

$$A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2,$$

et d'ailleurs, $c^2 = A^2 - B^2$; donc l'expression de la tangente devient

$$\text{tang } V = \frac{A^2B^2 - B^2cx''}{A^2cy'' - c^2x''y''} = \frac{B^2(A^2 - cx'')}{cy''(A^2 - cx'')} = \frac{B^2}{cy''}.$$

Si de l'autre foyer F', on mène le rayon vecteur $F'M'$, et qu'on calcule la tangente de l'angle $F'M'T = V'$, on trouvera

$$\text{tang } V' = -\frac{B^2}{cy''},$$

résultat auquel on devait s'attendre, puisqu'il ne peut y avoir

de différence entre ces deux tangentes, que celle qui résulte des signes contraires des abscisses CF et CF'. Ces deux angles $FM'T$, $F'M'T$ ayant leurs tangentes trigonométriques égales et de signes contraires, sont supplémens l'un de l'autre, ensorte que

$$FM'T + F'M'T = 200^d,$$

et parce qu'on a aussi

$$F'M'T + F'M't = 200^d,$$

on en conclut

$$FM'T - F'M't = 0, \text{ d'où } FM'T = F'M't.$$

Il suit de là que *la normale divise en deux parties égales l'angle de deux rayons vecteurs.*

117. De cette propriété on déduit une manière très-simple *de mener graphiquement une tangente à l'ellipse*, 1°. *par un point donné sur cette courbe ; 2°. par un point exterieur.*

Dans le premier cas, on mènera les rayons vecteurs FM', $F'M'$; on prolongera le plus grand, par exemple, $F'M'$ d'une quantité $M'K = FM'$; joignant K et F, la ligne $M'T$ perpendiculaire à FK, sera la tangente demandée. En effet, l'angle $FM'T = TM'K = tM'F'$: on est donc ramené à l'égalité des angles de chacun des rayons vecteurs avec les portions $M'T$ et $M't$ de la ligne Tt, qui conséquemment est tangente en M'. Fig. 76.

On peut encore s'assurer que cette droite, ainsi déterminée, ne rencontre la courbe qu'en M'. Car, pour tout autre point t pris sur cette ligne, et aussi près qu'on voudra de M', on a toujours

$$F't + tK > F'K > F'M' + M'F > 2A.$$

donc le point t ne peut être sur l'ellipse.

Il est aisé de démontrer, par l'analyse, que la ligne FK et la tangente $M'T$ sont perpendiculaires l'une à l'autre. En effet,

la tangente de l'angle KFL, ayant abaissé du point K, la perpendiculaire KL sur le grand axe, est $= \frac{KL}{FL} = \frac{A^2}{B^2}\frac{y''}{x''}$, et on a, d'ailleurs, tang $M'TX = -\frac{B^2}{A^2}\frac{x''}{y''}$. La somme faite du produit de ces tangentes et de l'unité, étant zéro, la propriété a lieu.

Dans le second cas, soit t le point duquel on doit mener une
Fig. 76. tangente à l'ellipse : du point F', comme centre, avec un rayon égal au grand axe $2A$, on décrira un arc de cercle, du point donné t comme centre, avec un rayon tF, on décrira un autre arc de cercle qui coupera le premier en K; menant $F'K$, le point M' d'intersection, sera celui de tangence; et joignant M' et t, la droite $M't$ sera la tangente demandée.

En effet, d'après cette construction, $tF = tK$, de plus

$$F'M' + M'K = 2A,\ F'M' + M'F = 2A;$$

donc

$$M'K = M'F:$$

conséquemment les points t et M' sont à des distances égales tK, tF; $M'K$, $M'F$ des points K et F, la ligne $M't$ est donc perpendiculaire sur le milieu de FK, et les angles $FM'T$, $F'M't$ sont égaux; donc la droite tM' est tangente.

Les cercles décrits des points F' et t comme centres, se coupent en deux points, lesquels annoncent et donnent les deux tangentes qu'on peut mener à cette courbe par le point donné (ch. XI *des tang.*)

118. *Le produit des perpendiculaires menées de chacun des foyers de l'ellipse sur la tangente, est égal au carré du demi-second axe.*

Nous donnerons deux solutions de ce problème, l'une par l'analyse, et l'autre par la géométrie.

1°. Nous avons trouvé (pag. 28) cette expression de la plus courte distance d'un point à une droite

$$D = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}},$$

a représentant la tangente de l'inclinaison de la tangente sur l'axe des abscisses, et b l'ordonnée CR du point dans lequel elle coupe l'axe des y. Or $a = -\frac{B^2x''}{A^2y''}$, et b comme ordonnée correspondante à $x = 0$ dans l'équation de la tangente, est $b = \frac{B^2}{y''}$; d'ailleurs, pour le foyer F, on a $y' = 0$, $x' = c$; ainsi les perpendiculaires étant FH, $F'H'$, on a Fig. 83.

$$FH = \frac{\left(\frac{B^2cx''}{A^2y''} - \frac{B^2}{y''}\right)}{\sqrt{1 + \frac{B^4x''^2}{A^4y''^2}}} = + \frac{B^2(cx'' - A^2)}{\sqrt{A^4y''^2 + B^4x''^2}},$$

$$F'H' = - \frac{\left(\frac{B^2cx''}{A^2y''} + \frac{B^2}{y''}\right)}{\sqrt{1 + \frac{B^4x''^2}{A^4y''^2}}} = \frac{-B^2(cx'' + A^2)}{\sqrt{A^4y'' + B^4x''^2}}$$

et conséquemment

$$FH \times F'H' = B^2.$$

2°. Soit décrit sur le grand axe comme diamètre une demi-circonférence, nous démontrerons qu'elle passe par les points H' et H. Cela posé, si l'on prolonge la ligne HC jusqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence en h, et qu'on mène $F'h$, les triangles FHC, $F'Ch$ seront égaux, à cause de $CF = CF'$, $CH = Ch$ et de l'angle $HCF = F'Ch$; donc $F'h$ est égale et parallèle à FH, et comme $F'H'$ est aussi parallèle à FH, la

ligne $H'F'h$ est droite. Les deux cordes $A'A$, $H'h$ donnent donc

$$H'F' \times F'h = A'F' \times F'A,$$

ou

$$H'F' \times FH = A'F' \times F'A = (A-c)(A+c) = A^2 - c^2 = B^2.$$

Reste à démontrer que la ligne menée du point C, centre de l'ellipse, au point H' ou H, est égale au demi-grand axe. Soit prolongé le rayon vecteur FM jusqu'à la rencontre de $F'H'$ en R' : le triangle $R'MH'$ est égal au triangle $H'MF'$, à cause de l'angle $R'MH' = H'MF'$ (117), d'un angle droit dans chaque triangle, et du côté commun MH' ; donc $MR' = MF'$ et FM
Fig. 83. $+ MR'$ ou $FR' = 2A$; or la ligne $H'C$ divisant les côtés $F'F$ et $F'R'$ en parties égales, est la moitié de FR' ; donc $H'C = A$. On démontrerait de la même manière que $CH = A$; donc, etc.

119. Le produit des ordonnées des points de la tangente, qui ont pour abscisse $-A$, $+A$ est encore égal à B^2. En effet, si on fait successivement $x = +A$, $x = -A$ dans l'équation de la tangente

$$A^2y''y + B^2x''x = A^2B^2,$$

on trouve pour les ordonnées correspondantes

$$y = \frac{B^2(A \mp x'')}{Ay''}, \text{ donc } Ar \times A'r' = \frac{B^4(A^2 - x''^2)}{A^2y''^2} = B^2 ;$$

et conséquemment

$$Ar \times A'r' = FH \times F'H'.$$

120. Nous donnerons ici une seconde solution de ce problème ; *étant donnés les axes, trouver deux diamètres conjugués qui fassent entre eux un angle donné.*

Fig. 83. Sur le grand axe, on décrira un arc de cercle capable d'un angle donné ; par le point où l'arc coupera l'ellipse, on mènera aux extrémités de ce grand axe deux cordes, lesquelles, ainsi qu'on l'a démontré, seront respectivement parallèles aux dia-

mètres cherchés. Cet angle, entre les diamètres conjugués, est toujours obtus, et le problème n'est possible que dans ce cas. Fig. 83.

Soit LAX l'angle des deux diamètres, et a sa tangente trigonométrique, l'équation de Ll sera

$$y = a(x - A).$$

le rayon du cercle capable de l'angle donné, sera la perpendiculaire AR, et on aura pour son équation

$$y = -\frac{1}{a}(x - A)$$

l'ordonnée du point où cette ligne coupera le second axe, est donnée par $x' = 0$ dans l'équation précédente, et on en déduit

$$y = \frac{A}{a} = y' :$$

l'équation du cercle décrit du centre R avec le rayon AR, est donc

$$\left(y - \frac{A}{a}\right)^2 + x^2 = r^2;$$

mais parce que $r^2 = A^2 + \frac{A^2}{a^2}$, on a

$$\left(y - \frac{A}{a}\right)^2 + x^2 = A^2 + \frac{A^2}{a^2},$$

ou

$$y^2 - \frac{2A}{a}y + x^2 = A^2 :$$

il s'agit de trouver les coordonnées des intersections de ce cercle avec l'ellipse

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2;$$

à cet effet, nous prendrons la valeur de x^2 dans la première, pour la substituer dans celle-ci, qui deviendra

$$(A^2 - B^2)y^2 + \frac{2B^2A}{a}y = 0,$$

d'où résultent ces deux valeurs de y,

$$y = 0, \; y = \frac{2B^2A}{a(A^2 - B^2)};$$

la première indique que le cercle coupe le grand axe à ses extrémités : les abscisses correspondantes à la seconde valeur, sont fournies par l'équation du second degré,

$$a^2(A^2 - B^2)^2x^2 = A^2[a^2(A^2 - B^2)^2 - 4B^2A^2],$$

d'où l'on déduit

$$x = \pm \frac{A\sqrt{a^2(A^2 - B^2)^2 - 4B^2A^2}}{a(A^2 - B^2)}.$$

Pour que ces abscisses soient réelles, il faut qu'on ait

$$a^2(A^2 - B^2)^2 > 4B^2A^2,$$

cette condition donne ces deux conséquences

$$a > \frac{2BA}{A^2 - B^2},$$

et

$$a > -\frac{2BA}{A^2 - B^2};$$

Or de deux angles obtus, et qui ont conséquemment des tangentes négatives, celui qui a la plus grande tangente est le plus petit, c'est-à-dire que les limites de l'angle donné, sont (103) les angles faits par deux cordes supplémentaires menées des extrémités du petit axe, à une extrémité du grand, et des extrémités du grand à une extrémité du petit : le cercle coupera la portion de l'ellipse ABA', en deux points n et n' qui auront deux abscisses différentes seulement par le signe ; et comme les cordes menées de chacun de ces points aux extrémités du grand axe, comprennent des angles égaux, les diamètres

respectivement parallèles, formeront deux systèmes de diamètres conjugués, faisant entre eux le même angle.

121. Les équations de l'ellipse, rapportées à des diamètres conjugués, c'est-à-dire, à des axes obliques, et de la ligne droite rapportée aux mêmes axes, étant exactement de même forme que celles qu'on obtient pour des axes rectangulaires (12, 15, 69), si cependant on a conservé même origine des coordonnées, nécessairement si des extrémités d'un diamètre, on mène deux cordes à un point quelconque d'une ellipse,

$$A'^2y^2 + B'^2x^2 = A'^2B'^2,$$

on aura la relation

$$A'^2\alpha\alpha' + B'^2 = 0, \text{ d'où } \alpha\alpha' = -\frac{B'^2}{A'^2},$$

α, α' désignant les rapports $\frac{\sin\gamma}{\sin(\zeta-\gamma)}$, $\frac{\sin\gamma'}{\sin(\zeta-\gamma')}$, γ, γ' les angles de ces droites avec le diamètre A', et ζ l'angle de B' avec A' (12).

L'équation de la tangente sera toujours (ch. XI)

$$A'^2y''y + B'^2x''x = A'^2B'^2,$$

et conséquemment

$$a = -\frac{B'^2}{A'^2}\cdot\frac{x''}{y''};$$

la droite menée du centre au point de tangence, donnera toujours

$$a' = \frac{y''}{x''},$$

ensorte que

$$aa' = -\frac{B'^2}{A'^2},$$

a et a' tenant lieu des rapports $\frac{\sin\omega}{\sin(\zeta-\omega)}$, $\frac{\sin\omega'}{\sin(\zeta-\omega')}$;

donc encore, si $\alpha = \alpha$, ce qui suppose $\omega = \gamma$, on aura $\alpha' = \alpha'$, ou $\omega' = \gamma'$. On déduira de là un procédé analogue à celui que nous avons indiqué (114) pour mener une tangente en un point d'une ellipse rapportée à des diamètres conjugués. Les deux diamètres menés l'un par le point de tangence, et l'autre parallèlement à la tangente, seront donc aussi conjugués.

Ainsi, pour avoir un système de diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné, sans connaître les axes, en supposant cependant le centre de l'ellipse, il faut, sur un diamètre quelconque, décrire un arc de cercle capable de cet angle; par le point où l'arc coupera l'ellipse, on mènera aux extrémités du diamètre, des cordes qui seront respectivement parallèles aux lignes qu'on cherche.

CHAPITRE XIV.

Propriétés de la Parabole.

122. Nous avons trouvé (page 95) pour équation de la parabole

$$y^2 = 2px,$$

l'axe des x étant symétrique dans la courbe, et celui des y ne faisant que la toucher à l'origine qui est le sommet.

Pour deux abscisses x, x' auxquelles correspondent y, y', on a

$$y^2 : y'^2 :: 2px : 2px' :: x : x' :$$

donc *les carrés des ordonnées sont comme les abscisses.*

Le coefficient $2p$ se nomme *paramètre.*

123. En rapprochant l'équation de la parabole de celle de l'ellipse rapportée au sommet, et énoncée au moyen du paramètre (106), savoir,

$$y^2 = \frac{2p}{2A}(2Ax - x^2) = 2p\left(x - \frac{x^2}{2A}\right),$$

on voit que la première courbe n'est que la seconde infiniment alongée, puisque pour $A = \infty$, cette équation devient

$$y^2 = 2px.$$

D'après cela, il est naturel de penser que la parabole ne conserve plus qu'un des *foyers* de l'ellipse.

124. Soient x', y' les coordonnées d'un point tel que sa distance à tout point de la parabole, soit une fonction rationnelle de l'abscisse (104) ; en désignant cette distance par z, on aura

$$z=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-\sqrt{2px})^2}.$$

la condition énoncée à l'égard de z, ne peut avoir lieu que sous les hypothèses

$$y'=0,\ p-x'=x',\ \text{d'où}\ x'=\frac{p}{2};$$

Fig. 84.

il existe donc un tel point sur le grand axe, dont l'abscisse $AF=\frac{p}{2}=$ le quart du paramètre. Ce point F se nomme *foyer*, et la ligne MF, *rayon vecteur ;* elle jouit comme chacune des lignes analogues de l'ellipse, de la propriété d'être exprimée sans radical au moyen de l'abscisse.

L'ordonnée qui passe par le foyer, est

$$y=\pm p,\ \text{et}\ 2y=2p;$$

ainsi le *paramètre* $2p$ n'est autre chose que la double ordonnée passant par le foyer.

125. Si perpendiculairement à l'axe des abscisses et à la distance $\frac{p}{2}$ de l'origine, extérieurement à la courbe, on mène une droite, il est clair que la distance MN de chaque point M de la courbe à cette droite, est $\frac{p}{2}+x=FM$.

La parabole jouit donc de la propriété *d'avoir chacun de ses points autant éloigné du foyer* F *que d'une droite fixe* SQ *donnée de position :* cette ligne SQ se nomme *directrice.*

Fig. 84. D'où suit un moyen fort simple de décrire la parabole par points : on prendra sur l'axe des abscisses, autant de points O que l'on voudra ; et par chacun d'eux, on mènera des parallèles OD, od à la directrice ; coupant chaque parallèle en P

et p par des arcs décrits du foyer F, comme centre, et avec la distance OR comme rayon, on déterminera une suite de points P et p qui appartiendront à la parabole, puisqu'ils seront à des distances égales du foyer et de la directrice.

Mais si sur une tangente au sommet A on prend $AG = AR = AF$, et qu'on mène la droite RGD, les triangles semblables RAG, ROD donneront $RA : AG :: RO : OD$; donc $OD = RO$. On pourra donc du foyer, comme centre, avec OD, od, comme rayons, décrire des arcs qui couperont les perpendiculaires OD, Od en des points P et p qui seront à la parabole. Les lignes RD, Rd touchent la parabole aux intersections m et m' de la transversale passant par le foyer. Cette description est analogue à celle de l'ellipse (109), et on observera, 1°. que le parallélogramme $GLlg$ de l'ellipse se change ici dans le triangle dRD; 2°. que l'angle ARG qui, dans la première courbe, est $< 50°$ est ici $= 50°$. Fig. 84.

126. Proposons-nous réciproquement de *trouver une courbe, telle que les distances de chacun de ses points à une droite et à un point donnés, soient égales entre elles.*

Soient F le point donné, SQ la droite donnée : prenons pour axe des abscisses la ligne RX perpendiculaire à SQ, plaçons l'origine au point A, milieu de FR, et représentons FA par $\frac{p}{2}$, et FM par z; nous aurons Fig. 84.

$$z^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2, \quad z = x + \frac{p}{2};$$

éliminant z, il viendra

$$y^2 = 2px,$$

équation à la parabole qui jouit exclusivement de la propriété en question.

127. Si, comme nous l'avons fait dans l'ellipse, on veut prendre pour coordonnées, le rayon vecteur, et l'angle φ qu'il

fait pour chaque point, avec l'axe des abscisses, on aura

$$y = z\sin\varphi,\quad x = \frac{p}{2} + z\cos\varphi :$$

ces valeurs substituées dans l'équation de la parabole, donnent celle-ci

$$z^2\sin^2\varphi = p^2 + 2pz\cos\varphi,$$

ou

$$z^2 = p^2 + 2pz\cos\varphi + z^2\cos^2\varphi = (p + z\cos\varphi)^2,$$

Fig. 84. et enfin pour l'équation polaire de la parabole

$$z = \frac{p}{1 - \cos\varphi}.$$

Pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 2c0^d$, on aura

$$z = \frac{p}{0},\quad z = \frac{-p}{2},$$

c'est-à-dire, un rayon vecteur infini, et un autre $= FA$: la première valeur de z prouve que la parabole ne rencontre son axe que dans un point.

128. Nous avons trouvé (92) cette équation de la tangente en un point de la parabole x', y', que nous appellerons ici x'', y''

$$y''y = p(x'' + x),\ \text{d'où}\ y = \frac{p}{y''}x + p\frac{x''}{y''}.$$

Donc la tangente trigonométrique de l'angle fait par la tangente avec l'axe des abscisses, est

$$a = \frac{p}{y''} :$$

cet angle donné par la tangente a, est aussi l'angle d'inclinaison de l'élément au point x'', y'' sur une parallèle à l'axe des abscisses; pour $y'' = 0$, on trouve

$$a = \infty ;$$

donc la parabole tombe à angle droit sur l'axe des abscisses : l'ordonnée y'' augmentant, a diminue, et tend vers zéro ; ainsi les élémens de parabole s'infléchissent continuellement, et le dernier n'est pas parallèle à l'axe.

La soutangente est (90)

$$TP = 2x'',$$

propriété qui fournit un moyen très-simple de mener une tangente par un point donné sur une parabole : on peut aussi se servir à cet effet de la valeur de la sounormale (90) Fig. 85.

$$PN = p,$$

en observant que la tangente est une perpendiculaire à la normale au point donné.

129. Si du foyer F dont les coordonnées sont $y' = 0$, $x' = \frac{p}{2}$, on mène une droite au point de tangence x'', y'', on aura pour la tangente trigonométrique de l'angle qu'elle fait avec l'axe des Fig. 85. abscisses,

$$\alpha = \frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{-y''}{\frac{p}{2} - x''}.$$

L'angle $FM'T$ que fait cette droite avec la tangente, en M', a pour tangente trigonométrique,

$$\frac{\alpha - a}{1 + \alpha a};$$

qui devient après les substitutions des valeurs de α et de a, et les réductions, $\frac{p}{y''}$, ou $a = \text{tang } M'TF$.

Donc, dans la parabole, *l'angle formé par la tangente avec un rayon vecteur au point de tangence, est égal à celui de la tangente avec l'axe.*

Si par le point de tangence $M'F'$, on mène la droite $M'F'$ Fig. 85.

parallèle à l'axe, on aura l'angle $T'M'F' = M'TF$, et si l'on observe qu'en passant de l'ellipse à la parabole, l'un des rayons vecteurs $M'F'$ devient infini, en même temps que le grand axe, et qu'alors $M'F'$ est parallèle à AX, on reconnaîtra que la propriété de l'ellipse se transforme ici dans la suivante : *les droites menées du point de tangence au foyer, et parallèlement à l'axe, font avec la tangente des angles égaux.*

Fig. 85. De là résulte un moyen très-simple de mener une tangente à la parabole par un point extérieur, tel que t. Soit F le foyer, et SQ la directrice : du point t comme centre, avec un rayon tF, on décrira une circonférence de cercle qui coupera la directrice en L, de ce point on mènera une parallèle à l'axe; le point M' où cette parallèle rencontrera la parabole, sera celui de tangence, et tM' sera la tangente cherchée.

En effet, par une propriété de la parabole démontrée (125),

$$M'L = M'F,$$

par construction,

$$tL = tF;$$

donc l'angle $LM't = tM'F = F'M'T$, égalité qui caractérise la tangente en M'.

En rapprochant cette construction de celle que nous avons donnée pour l'ellipse, on verra qu'elle n'en est qu'une modification déterminée par l'éloignement infini du second foyer de la parabole.

130. Passons à quelques problèmes sur la parabole.

1°. *Trouver sur l'axe d'une parabole, le centre N d'un cercle qui touche une ordonnée* M'Pm' *donnée de position en un point* P', *et la parabole en deux points.*

Fig. 86. On prendra sur l'axe une longueur $P'P = P'M'$, au point P on élevera la double ordonnée mPM, et ayant pris PN égale à la moitié du paramètre, le point N sera le centre, et NM le rayon du cercle demandé.

D'après la construction, la ligne PN est la sounormale du point M (90); donc la tangente tT l'est en même temps à la parabole, et au cercle décrit du centre N; donc déjà ce cercle touche la parabole dans les deux points M et m. En second lieu, si l'on désigne le paramètre par $2p$, on a

$$\overline{MN}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 = 2p(AP' - P'P) + p^2,$$

$$\overline{P'N}^2 = (P'P - PN)^2 = (P'M' - PN)^2 = \overline{P'M'}^2 + \overline{PN}^2 - 2P'M'.PN$$
$$= 2p(AP' - P'P) + p^2;$$

donc $MN = P'N$.

2°. *Inscrire une droite* Mm *d'une longueur donnée dans une section conique* MAm, *de manière que cette droite passe par le point* G *donné de position.*

Soit AX l'axe principal de la courbe : menons les ordonnées Fig. 87.
MP, mp, GE. Pour avoir la position de la droite MN, on pourrait indifféremment chercher les points M ou m; mais comme ils sont déterminés de la même manière par les lignes MG, MP ou AP, et par les lignes mG, mp, Ap, il ne faudra se servir ni de l'un ni de l'autre, mais plutôt d'un troisième point F, qui ait avec eux la même relation, ou dont ceux-ci dépendent de la même manière (*Arithm. univ.*).

Soient donc $AE = x'$, $EG = y'$, $mM = c$, $FE = z$, $AP = x$, $PM = y$; on aura $FP = x - x' + z$. Or on déduit de la proportion

$$GE : EF :: MP : PF = \frac{yz}{y'},$$

égalant les deux valeurs de FP, on obtient

$$x - x' + z = \frac{yz}{y'}.$$

Supposons, pour plus de simplicité, que la section conique

soit la parabole de l'équation

$$y^2 = 2px,$$

on en tirera la valeur de x pour la substituer dans la relation précédente, et résolvant l'équation résultante par rapport à y, on trouvera ces deux valeurs,

$$y = \frac{pz}{y'} \pm \sqrt{\left\{\frac{z^2}{y'^2} + 2p(x' - z)\right\}}.$$

On voit donc que le radical est la différence des deux valeurs de y, c'est-à-dire, des lignes $+PM$, $-PM'$ ou $-mp$: donc la ligne MM' sera cette différence. Or la proportion

$$FG : GE :: mM : MM'$$

donne

$$\sqrt{y'^2 + z^2} : y' :: c : \sqrt{\frac{z^2}{y'^2} + 2p(x' - z)} :$$

égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, élevant au carré, et ordonnant, on trouve cette équation du quatrième degré,

$$\left.\begin{matrix} 4p^2z^4 - 8py'^2z^3 + 8px'y'^2 \\ -4p^2y'^2 \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} 8py'^4z - 8px'y'^4 = 0 \\ + c^2y'^4 \end{matrix}\right.$$

et on serait arrivé à une du huitième, si on eût cherché MG, MP, ou AP. Cette équation est constructible par le moyen d'une parabole donnée et d'un cercle (ch. X).

CHAPITRE XV.

Propriétés de l'Hyperbole.

131. Nous avons trouvé pour équation de cette courbe rapportée au centre et aux axes (page 100),

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2,$$

et pour celle de la même courbe rapportée au sommet, et à deux axes dont l'un est symétrique, et l'autre tangent (page 101),

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -2B^2Ax.$$

Nous rappellerons qu'on passe des équations de l'ellipse à celles-ci, en changeant dans les premières B en $B\sqrt{-1}$.

Pour deux abscisses x', x'' auxquelles correspondent les ordonnées y', y'', on a cette relation,

$$\frac{y'^2}{y''^2} = \frac{(x'+A')(x'-A)}{(x''+A)(x''-A)}.$$

On voit que *les carrés de deux ordonnées, sont entre eux comme les produits de leurs distances aux sommets* A, A'.

132. Si par les sommets A et A', on mène deux droites, et qu'on les assujétisse à se couper en un point M de l'hyperbole, Fig. 88.
on trouvera cette relation entre les tangentes trigonométriques des angles qu'elles font avec l'axe des abscisses

$$\alpha\alpha' = \frac{B^2}{A^2},$$

la même, au signe près, que celle que nous avons trouvée dans l'ellipse, et qui s'en déduit en changeant dans celle-ci, B en $B\sqrt{-1}$: comme ce produit est positif, on conclura que les angles de ces cordes avec l'axe, sont aigus dans l'hyperbole, tandis que dans l'ellipse, l'un d'eux est obtus (102). Pour l'hyperbole équilatère, $B = A$, et conséquemment

$$aa' = 1 :$$

Ainsi, *dans l'hyperbole ordinaire, les droites menées d'un point de la courbe aux sommets, font des angles aigus dont l'ouverture est dirigée dans le même sens ; et, pour l'hyperbole équilatère, ces angles valent en somme un droit.*

On sait que dans le cercle les cordes menées des extrémités du diamètre à un point de la circonférence, font avec l'axe des abscisses deux angles aigus qui, en somme, valent un droit; mais les ouvertures de ces angles sont opposées.

133. La tangente de l'angle V formé par les deux cordes $A'M$, AM, se calcule comme dans l'ellipse, et on trouve

$$\text{tang}\, V = \frac{2AB}{(A^2 + B^2)\sqrt{\frac{x^2}{A^2} - 1}};$$

or l'abscisse x augmentant, la tangente et conséquemment l'angle V diminuent; cet angle décroit jusqu'à zéro, qui est la limite qu'il atteint lorsque l'abscisse arrive à l'infini. Pour l'hyperbole équilatère,

$$\text{tang}\, V = \frac{A}{\sqrt{x^2 - A^2}} = 1,$$

si l'abscisse $x = A\sqrt{2}$. La même hyperbole a pour équation

$$x = \sqrt{A^2 + y^2};$$

Fig. 88. or on a aussi

$$P'A = \sqrt{\overline{CA}^2 + \overline{P'C}^2} = \sqrt{A^2 + y^2};$$

donc

$$P'M = P'A :$$

De cette propriété résulte un moyen simple de construire l'hyperbole équilatère par points. *Par tous les points du second axe, on mènera des parallèles au premier, et rapportant sur chacune d'elles la distance du point par lequel elle est menée, au sommet donné de l'hyperbole équilatère, on aura un point de chacune des branches opposées.*

134. Il est assez naturel de rechercher s'il n'existe pas dans l'hyperbole deux points correspondans aux foyers de l'ellipse, Fig. 88. et comme ceux-ci ont pour abscisses $\pm\sqrt{A^2 - B^2}$, l'analogie porte à supposer que, par rapport à l'hyperbole, ils correspondront aux abscisses $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$; et en effet, si l'on désigne par z', z les distances de ces points à un point quelconque de la courbe x, y, on trouve

$$z' = \frac{x\sqrt{A^2 + B}}{A} + A, \quad z = \frac{x\sqrt{A^2 + B^2}}{A} - A.$$

Donc ces rayons vecteurs sont effectivement exprimés d'une manière rationnelle au moyen de l'abscisse, et leur différence

$$z' - z = 2A.$$

Cette propriété des foyers sert à la construction de l'hyperbole : pour cela, *de l'un des foyers comme centre, et d'un rayon quelconque, on décrit un arc de cercle que l'on coupe par un autre arc décrit du second foyer, et avec un rayon différent du premier, d'une quantité égale au premier axe, ensorte que la différence reste égale au grand axe.*

135. Le *paramètre* de l'hyperbole, c'est-à-dire, la double ordonnée passant par le foyer, a pour valeur $\frac{2B^2}{A}$, et conséquemment $2A$ dans l'hyperbole équilatère.

136. En reprenant la marche que nous avons suivie dans l'ellipse, nous pouvons déduire l'équation de l'hyperbole de cette propriété,

$$z' - z = 2A.$$

Fig. 88. Soient F', F les points fixes donnés, l'origine C au milieu de la droite qui les joint, et que nous ferons $= 2c$, et supposons que M soit un des points pour lesquels on a

$$F'M - FM = 2A = z' - z;$$

on a

$$z'^2 = y^2 + (x+c)^2;\ z^2 = y^2 + (x-c)^2.$$

En employant ces trois équations comme nous l'avons fait dans l'ellipse, on parvient à celle-ci,

$$A^2(y^2 + x^2) - c^2x^2 = A^2(A^2 - c^2).$$

Mais ici, il est évident qu'il ne peut y avoir sur l'axe des y passant par le milieu C de $F'F$, un point tel que $F'M - FM = 2A$, puisque, pour un tel point, cette différence est nulle : ainsi l'ordonnée correspondante à $x = 0$, sera nécessairement imaginaire, ou de la forme $B\sqrt{-1}$ et, dans cette hypothèse faite sur x, on a

$$y^2 = A^2 - c^2 = -B^2;$$

d'où l'on déduit

$$c^2 = A^2 + B^2;$$

ensorte que l'équation obtenue devient

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2,$$

c'est-à-dire, celle de l'hyperbole, seule courbe qui jouisse de la propriété énoncée.

137. Il existe une description de l'hyperbole analogue à celle que nous avons donnée pour l'ellipse et la parabole.

Aux extrémités A, A' du grand axe, on élevera les perpendiculaires $AG = AF$, $A'L = A'F$, situées, l'une au-dessous et l'autre au-dessus de l'axe ; on mènera la droite LG prolongée indéfiniment, ensuite, par des points O, etc. pris sur l'axe, on mènera des perpendiculaires terminées en D, sur lesquelles on marquera les points P et P, en décrivant de F, comme centre, des arcs avec les rayons OD, OD. On aurait pu prendre $A'g = A'F'$, $Al = F'A$, et tirant gl qui est parallèle à GL, on déterminerait les points P et P par le moyen de cette ligne gl, du foyer F' et des lignes Od, etc. Fig. 89.

On a, par construction,

$$Al = AF', \quad AG = AF = A'F';$$

donc

$$Al - AG = AF' - A'F' = AA';$$

ainsi, toutes les parallèles Dd sont égales au grand axe. Cela posé, on a $PF = OD$, mais aussi, parce que le même point P aurait pu être déterminé en coupant Od avec un arc décrit de F', comme centre, avec Od comme rayon, on a $PF' = Od$, donc

$$PF' - PF = Od - OD = AA';$$

donc le lieu des points P est une hyperbole. Il est facile de voir qu'il ne peut exister de points sous cette condition, sur les perpendiculaires situées entre A et A'.

On remarquera, 1°. que les lignes RD, rd sont tangentes, aux extrémités M et m des ordonnées qui passent par les foyers ; 2°. que l'angle ARG est plus grand que 56°.

138. L'hyperbole peut aussi être rapportée à des coordonnées polaires, c'est-à-dire à un rayon vecteur et à l'angle qu'il fait avec l'axe des abscisses : mais nous nous dispenserons de faire une troisième fois ce calcul, qui ne présente aucune difficulté.

139. L'équation de la tangente à l'hyperbole est (92)

$$A^2y'y - B^2x'x = -A^2B^2;$$

on en déduit pour la tangente de l'angle d'inclinaison de cette ligne sur l'axe des abscisses,

$$a = \frac{B^2 x''}{A^2 y''}.$$

Pour $y'' = 0$, c'est-à-dire, aux sommets A, A', l'élément est perpendiculaire à la courbe. Ainsi les trois sections coniques tombent à angle droit sur l'axe symétrique : cette inclinaison ne peut jamais devenir nulle, car pour $x'' = 0$, y'' est imaginaire ; et pour $y'' = \infty$, on trouve $x'' = \infty$, abscisse impossible.

Si par le centre et le point de tangence M', on mène une droite, elle aura pour équation

Fig. 88. $$y = \frac{y''}{x''} x, \text{ d'où } a' = \frac{y''}{x''};$$

multipliant a par a', on obtient cette relation

$$aa' = +\frac{B^2}{A^2};$$

mais nous avons trouvé de plus cette relation (132),

$$aa' = +\frac{B^2}{A^2}$$

entre les tangentes trigonométriques des cordes AM, $A'M$ menées des sommets en un point quelconque de l'hyperbole : donc si $a' = a'$, nécessairement $a = a$: conséquemment la corde $A'M$ étant parallèle à la ligne CM' menée du centre au point de tangence, la tangente $M'T$ sera parallèle à l'autre corde AM. Cette propriété fournit, pour mener une tangente en un point donné sur l'hyperbole, un procédé absolument le même que celui que nous avons prescrit à l'égard de l'ellipse (114).

Le point de tangence M' est sur une hyperbole décrite sur CT' comme premier axe, et dont le rapport des axes est $\frac{B}{A}$. (Voyez l'*ellipse*.)

140. Si du foyer F on mène une droite au point M' ou x'', y'', de tangence, on trouvera pour tangente de l'angle $M'FX$, Fig. 88.

$$a = -\frac{y''}{c - x''}.$$

On sait (139) que

$$a = \frac{B^2}{A^2} \cdot \frac{x''}{y''},$$

et désignant l'angle $FM'T$ par V, on déduira de ces deux données, comme nous l'avons fait pour l'ellipse,

$$\text{tang } V = \frac{+B^2}{cy''}.$$

La tangente de l'angle V' fait par le second rayon vecteur, $F'M'$ avec $M'T$, est

$$\text{tang } V' = +\frac{B^2}{cy''};$$

donc l'angle $FM'T = F'M'T$, c'est-à-dire, que, *dans l'hyperbole, les droites menées du point de tangence aux deux foyers, font avec la tangente, et de part et d'autre de cette ligne, des angles égaux.*

Si l'on prolonge le rayon vecteur $F'M'$, l'angle $fM'F$ est Fig. 88. divisé par la normale en deux angles égaux.

141. On tire de ces propriétés la construction suivante pour mener une tangente à l'hyperbole par un point donné.

Si on le suppose sur la courbe en M', on mènera les rayons vecteurs FM', $F'M'$, on prendra sur celui-ci, à partir du point Fig. 88. M', la longueur $M'K = M'F$; joignant K et F par une droite et lui menant la perpendiculaire $M'T$, ce sera la tangente cherchée : en effet, les angles $FM'T$, $F'M'T$ sont égaux entre eux. Pour tout point t' pris sur la tangente, quelque voisin qu'il soit de M', on a

$F't' < F'K + Kt$, d'où $F't' - Kt'$ ou $F't' - t'F < F'K$ ou $< 2A$

Que le point donné soit extérieur à la courbe, en t, par exemple : de ce point, comme centre, avec un rayon égal à Ft, on décrira une circonférence de cercle ; du second foyer F', comme centre, avec un rayon égal au grand axe, on décrira une autre circonférence qui coupera la précédente en K ; menant FK qui rencontre la courbe en M', le point M' sera le point de tangence, et tM' la tangente cherchée ; car 1°

$$tK = tF :$$

on a aussi

$$F'M' - KM' = 2A,\ F'M' - M'F = 2A;$$

donc 2°

$$KM' = M'F;$$

et conséquemment la ligne tM' est perpendiculaire sur KF, et elle divise l'angle $F'M'F$ en deux angles égaux.

Les circonférences décrites des points t et F' se coupent en deux points qui donnent les deux tangentes qu'il est possible de mener par un point extérieur : nous verrons bientôt comment ces tangentes se distribuent entre les deux branches de la courbe, d'après les différentes positions du point donné.

142. Par une analyse absolument semblable à celle dont nous avons fait usage dans l'ellipse, on démontrera que, dans l'hyperbole, le produit des perpendiculaires abaissées de chacun des foyers sur la tangente, est égal à $-B^2$, B désignant le demi-second axe, et qu'il en est de même du produit des ordonnées à la tangente, ayant pour abscisses $+A$ et $-A$.

143. Nous avons reconnu (50) que les asymptotes de l'hyperbole, la seule des trois sections coniques qui en comporte, étaient deux lignes qui, passant par le centre, et comprenant entre elles

les deux branches, s'approchaient sans cesse de l'une et de l'autre, sans pouvoir les atteindre : il est facile de voir que les asymptotes sont les limites des tangentes menées aux points successifs de l'hyperbole. A cet effet, reprenons l'équation de la tangente

$$A^2y''y - B^2x''x = -A^2B^2;$$

l'abscisse du point dans lequel elle rencontre l'axe, est donnée par $y = 0$, d'où résulte Fig. 90.

$$x' = \frac{A^2}{x''} = CT :$$

x'' augmentant, x' diminue, et la limite, ou le dernier terme de ces diminutions, est zéro, c'est-à-dire, que lorsque le point de contact x'', y'' est, si l'on peut s'exprimer ainsi, à l'extrémité de la branche, le point T est en C.

Mais pour $x'' = \infty$, on déduit de l'équation de la courbe

$$y'' = \pm \frac{B}{A} x'' ;$$

cette valeur reportée dans l'expression

$$a = \frac{B^2}{A^2} \cdot \frac{x''}{y''}$$

la change dans celle-ci

$$a = \pm \frac{B}{A};$$

donc non-seulement cette dernière tangente passe par le centre, mais encore elle fait avec l'axe des abscisses, un angle dont la tangente est $\frac{B}{A}$: elle se confond donc avec l'asymptote.

Il est facile de démontrer que, pour une abscisse quelconque,

l'ordonnée de la courbe est toujours moindre que celle de l'asymptote : car on déduit de l'équation de la courbe

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2} x^2 - B^2,$$

et, pour la même abscisse x, l'ordonnée de l'asymptote, est

$$y = \frac{B}{A} . x, \text{ d'où } y^2 = \frac{B^2}{A^2} x^2;$$

ces deux valeurs de y^2 ne sont égales que pour $x = \infty$, puisqu'alors on peut négliger le terme B^2 vis-à-vis de $\frac{B^2}{A^2} x^2$.

Nous avons trouvé (71) que les diamètres égaux de l'ellipse passaient par le centre, et qu'ils faisaient avec l'axe des abscisses des angles ayant pour tangentes $+\frac{B}{A}, -\frac{B}{A}$; ensorte que si on construit une ellipse sur les deux axes de l'hyperbole, les diamètres égaux de la première courbe seront les asymptotes de la seconde et réciproquement.

144. Lorsque le point duquel on doit mener une tangente à l'hyperbole, est donné dans l'angle SCS' des asymptotes, qui renferme une branche, comme en t, les deux tangentes tM', $t\mu'$ touchent cette branche, et il est visible que leurs prolongemens venant à couper les asymptotes, restent au-dessus et au-dessous de la branche opposée. Le point t' étant donné dans l'angle
Fig. 90. sCs', les deux tangentes se distribuent entre les deux branches qu'elles touchent au-dessous de l'axe AA'. Généralement les tangentes menées par un point extérieur, doivent toucher la courbe avant de rencontrer les asymptotes; autrement elles deviendraient sécantes.

145. Par un point m pris sur l'asymptote CS, et dont les coor-
Fig. 90. données sont x', y', menons une droite mm' dans une position quelconque : son équation sera

$$y - y' = a(x - x');$$

mais parce que le point est pris sur l'asymptote représentée par

$$y = \frac{B}{A}x,$$

on aura $y' = \frac{B}{A}x'$, et l'équation précédente deviendra

$$y - \frac{B}{A}x' = \alpha(x - x').$$

Soit pris sur la droite mm' un point quelconque M, dont la distance à m, soit z; on aura

$$z = \sqrt{(y-y')^2 + (x-x')^2},$$

x et y étant les coordonnées du point M: si on remplace $y-y'$ par sa valeur $\alpha(x-x')$, on trouvera

$$x = x' + \frac{z}{\sqrt{1+\alpha^2}}: \text{ d'où } y = y' + \frac{\alpha z}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Si maintenant on veut que le point M soit en R, il faut dire que les coordonnées x, y satisfont à l'équation de l'hyperbole

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2.$$

le résultat de ces substitutions sera

$$z^2 + \frac{2Bx'\sqrt{1+\alpha^2}}{B+\alpha A}z - \frac{A^2B^2(1+\alpha^2)}{B^2-\alpha^2A^2} = 0,$$

dont les deux racines z', z'' sont mR, mR' : on a donc

$$z' + z'' = \frac{-2Bx'\sqrt{1+\alpha^2}}{B+\alpha A}.$$

Si l'on porte les valeurs précédentes de x et de y dans l'équation

$$y = -\frac{B}{A}x;$$

de l'asymptote CS', on dira que le point M est en m', et la valeur de z qu'on obtiendra, savoir,

$$z = -\frac{2Bx'\sqrt{1+a^2}}{B+aA},$$

sera la longueur $m\,m'$, interceptée entre les deux asymptotes: on a donc

$$z = z' + z'';$$

mais

$$\left.\begin{aligned} z &= mR' + R'm' \\ z' + z'' &= mR' + mR \end{aligned}\right\} \text{ donc } mR = R'm' :$$

Donc, si *l'hyperbole est coupée par une droite quelconque, les parties de cette droite, interceptées entre chaque branche et son asymptote, sont égales entr'elles.*

Cette propriété fournit un moyen de construire l'hyperbole, connaissant ses asymptotes et l'un de ses points, R, par exemple : on mènera par ce point des droites quelconques, telles que NRn, puis prenant $nr = NR$, le point r sera à l'hyperbole.

146. L'équation de la tangente en un point x'', y'' de l'hyperbole, est

$$A^2y''y - B^2x''x = -A^2B^2;$$

Fig. 91. celle de l'asymptote CS', est

$$y = -\frac{B}{A}x :$$

l'abscisse CP de l'intersection de ces deux droites, sera la valeur de x, résultante de l'élimination de y entre ces deux équations, et on trouve

$$x = \frac{A^2B}{Ay'' + Bx''}.$$

Comparons cette abscisse à Cp, qui est celle de l'intersection

avec CS' de la parallele $M'r$ à CS : l'équation de cette parallèle $M'r$, est

$$y - y'' = \frac{B}{A}(x - x'');$$

celle de CS' est

$$y = -\frac{B}{A}x;$$

l'abscisse Cp de leur rencontre r, est donnée par l'élimination de y; elle a pour valeur

$$X = \frac{Bx'' - Ay''}{2B};$$

Si l'on réduit au même dénominateur ces expressions de x et X, on trouve

$$x = \frac{2A^2B^2}{2B(Ay'' + Bx'')}; \quad X = \frac{-(A^2y''^2 - B^2x''^2)}{2B(Ay'' + Bx'')} = \frac{A^2B^2}{2B(Ay'' + Bx'')};$$

en observant que le point x'', y'' étant sur l'hyperbole, on a

$$-A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2 :$$

or CP étant double de Cp, on a Ct double de Cr ou $tr = rC$. Donc dans *l'hyperbole rapportée aux asymptotes, la sous-tangente comptée sur l'asymptote, est égale à l'abscisse du point de tangence, comptée sur la même asymptote : de plus, la portion de tangente $tM'T$, comprise entre les asymptotes, est divisée en deux parties égales au point M' de tangence, à cause de $CP' = P'T$.* Fig. 92.

147. Reprenons l'équation

$$xy = \frac{A^2 + B^2}{4},$$

trouvée (76), qui est celle de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes CX, CY; soient C le centre de l'hyperbole,.... $CB = CB'$ le demi-second axe; les quatre côtés AB, BA', Fig. 92.

$A'B'$, $B'A$ seront égaux; conséquemment la figure $ABA'B'$ sera un losange : si du point H, milieu de AC, on élève une perpendiculaire, elle passera par les points D, D' de rencontre des côtés AB, AB' avec les asymptotes; en effet, $HD = \frac{1}{2} CB = \frac{1}{2} AR$: on a donc

$$\overline{AD}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{DH}^2 = \frac{A^2 + B^2}{4};$$

comme les quatre triangles dont est composée la figure $ADCD'$, sont égaux entre eux, cette figure est un losange; soit C l'angle entre les asymptotes; l'équation précédente multipliée par $\sin C$, devient

$$xy \sin C = \frac{A^2 + B^2}{4} \sin C,$$

Le premier membre représente l'aire du parallélogramme construit sur les coordonnées $AP = x$, $PM = y$ d'un point quelconque de l'hyperbole : le second membre représente celle du parallélogramme $ADCD'$ formé sur les coordonnées du sommet, et ces deux aires sont constamment égales. Le grand losange $ABA'B'$ quadruple de $ADCD'$, se nomme la *puissance* de l'hyperbole.

Lorsque l'hyperbole est équilatère, l'angle des asymptotes est droit, $\sin C = 1$, le losange $ADCD'$ devient un carré, lequel est toujours égal au rectangle des coordonnées.

148. Si l'on mène le diamètre CM' et la tangente $tM'T$, et
Fig. 92. que l'on nomme toujours C, l'angle des asymptotes CY, CX; x, y les coordonnées CP', $P'M'$ du point M', rapporté à l'origine C et aux asymptotes, les triangles $CM'P'$, $M'P'T$ donneront

$$\overline{CM'}^2 = y^2 + x^2 \pm 2xy \cos C,$$

$$\overline{TM'}^2 = y^2 + x^2 \mp 2xy \cos C;$$

donc

$$\overline{CM'}^2 - \overline{TM'}^2 = 4xy \cos C;$$

or l'angle θ formé par chacune des asymptotes avec l'axe de la courbe, a pour tangente trigonométrique $\frac{B}{A}$: on aura donc

$$\sin\theta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}; \quad \cos\theta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

et à cause de $C = 2\theta$, d'où

$$\cos C = \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta,$$

on a

$$\cos C = \frac{A^2-B^2}{A^2+B^2};$$

or l'équation de la courbe est

$$4xy = A^2 + B^2,$$

et conséquemment

$$4xy\cos C = A^2 - B^2,$$

donc

$$\overline{CM'}^2 - \overline{TM'}^2 = A^2 - B^2;$$

mais nous avons vu (75), que telle était la relation qui devait exister entre les diamètres conjugués de l'hyperbole; or $M'Cm'$ est un de ces diamètres; donc $tM'T$ est son conjugué en longueur, en observant que $tM'T = 2M'T$ (146). Ainsi, ayant de longueur et de position celui des diamètres conjugués qui aboutit à la courbe, l'autre sera, en longueur, la portion de la tangente menée par l'une de ses extrémités, comprise entre les asymptotes : pour l'avoir en position, on le ramènera à passer par le centre parallèlement à la tangente $TM't$.

149. Nous terminerons par la résolution de deux questions.

1°. *Un point étant donné dans le plan d'une section conique, soit intérieurement, soit extérieurement, on propose de mener par ce point une perpendiculaire à la section, ou à la tangente, au point où aboutit la plus courte distance.*

Soient x', y' les coordonnées AP', $P'M'$ du point M' donné, et x et y celles AP et PM du point M, pied de la perpendiculaire; ces coordonnées étant rapportées à l'origine A, si l'on prolonge la perpendiculaire $M'M$ jusqu'en N et qu'on mène la parallèle Mm à AC, les triangles semblables MmM', PMT donnent la proportion

Fig. 93.

$$Mm : M'm :: PM : PT = \frac{y(y'-y)}{x+x'};$$

mais le point M est sur l'hyperbole qui a pour équation

$$y^2 = \frac{p}{A}(2A+x)x,$$

$2p$ étant le paramètre $= \frac{2B^2}{A}$; or la soutangente PT a pour expression

$$PT = \frac{(2A+x)x}{A+x},$$

lorsque l'origine est au sommet; c'est ce qu'on trouve en changeant x'' en $A+x$ dans la soutangente $\frac{x''^2-A^2}{x''}$ donnée (91): donc l'équation de la courbe énoncée au moyen de la soutangente, est

$$y^2 = \frac{p}{A}.(A+x)PT,$$

et remplaçant PT par sa valeur trouvée plus haut,

$$y = \frac{p}{A}(A+x)\frac{(y'-y)}{x+x'};$$

on tire de là

$$y = \frac{py'(A+x)}{A(x+x')+p(A+x)} = \frac{py'(A+x)}{kA+lx};$$

après avoir fait $x' + p = k$, $A + p = l$. Cette valeur mise en place de y dans l'équation de l'hyperbole

$$y^2 = \frac{p}{A}(2A + x)x$$

donne, en faisant, pour abréger, $m = \frac{Ak}{l}$, $n^2 = \frac{Apy'^2}{l^2}$,... cette équation du quatrième degré,

$$x^4 + 2A\left\{\begin{matrix} x^3 + 4Am \\ + 2m \end{matrix}\right.\left\{\begin{matrix} x^2 + 2Am^2 \\ + m^2 \\ - n^2 \end{matrix}\right.\left\{\begin{matrix} x - A^2n^2 = 0; \\ - 2An^2 \end{matrix}\right.$$

dont le dernier terme est négatif; il existe donc, au moins, deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative, et conséquemment la question admet, au moins, deux solutions; les élèves pourront s'exercer à les discuter et à résoudre le même problème sur la parabole.

2°. *Trouver le lieu du sommet d'un triangle dont la base* AB *est donnée, et dont les deux angles* DAB, DBA *sur cette base, ont une différence donnée.*

On prendra pour axe des abscisses la ligne MPQ faisant avec la base les angles APQ, BPM égaux chacun à la moitié de la différence des angles sur la base; cette droite fera avec DA, DM, les angles DQP, DMP égaux en effet, $QPA = BPM$, et chacun de ces angles est la moitié de la différence DBP, DAP; donc $DBP = DAP + QPA + BPM$; mais..... $DBP = BMP + BPM$; donc $DQP = BMP$ ou $DQM = DMQ$. Abaissons les perpendiculaires BN, AR, DO sur l'axe MQ, et soient $PO = x$, $DO = y$, $AR = BN = b$, $PR = PN = c$. Les triangles semblables BNM, DOM donnent Fig 94.

$$BN : DO :: MN : MO,$$

d'où l'on tire

$$DO - BN : DO :: MO - MN : MO = \frac{cy - xy}{y - b}.$$

De même, à cause des triangles semblables ARQ, DOQ, on a

$$AR : DO :: RQ : QO,$$

on a

$$DO + AR : DO :: QR + QO : QO = \frac{cy + xy}{y + b};$$

mais à cause des angles égaux DMQ, DQM, on a $MO = QO$, et conséquemment

$$\frac{cy + xy}{y + b} = \frac{cy - xy}{y - b};$$

et réduisant,

$$xy = bc,$$

équation de l'hyperbole rapportée aux asymptotes. *Newton*, dans son *Arithmetique universelle*, a donné deux solutions de ce problème; nous avons relaté la seconde comme étant la plus simple, quoique la première soit préférable à d'autres égards.

CHAPITRE XVI.

De la quadrature des courbes du premier ordre.

150. QUARRER une courbe, c'est évaluer l'espace compris entre l'arc de cette courbe, les deux ordonnées extrêmes, et le segment correspondant de l'axe des abscisses : l'espace parabolique est le seul qu'on puisse assigner exactement, la quadrature des autres courbes ne peut être qu'approchée. La solution de cette question dépend de la sommation de séries dont le *terme général* est an^m, et il faut entendre par-là qu'on obtient les premier, second, troisième, etc. termes de ces séries, en faisant dans an^m, $n = 1$, $= 2$, $= 3$, etc.

On nomme *terme sommatoire*, l'expression qui donne la somme d'un nombre quelconque de termes dont la loi est connue : telle est la fraction $\frac{aq^n - a}{q - 1}$ qui représente la somme des n premiers termes d'une progression géométrique qui commence par a, et dont le facteur constant est q.

Si l'on désigne par S la somme des n premiers termes de la série, dont le terme général est an^m, et par s celle des $n - 1$ premiers termes, on aura

$$S - s = an^m;$$

Or on passe de S à s, en changeant n en $n - 1$ dans S; donc si l'on pose

$$S = An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + Dn^{m-2} + \ldots\ldots + R,$$

A, B, C etc. étant des coefficiens indéterminés, l'identité

$$an^m = An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + \text{etc.}$$
$$- A(n-1)^{m+1} - B(n-1)^m - C(n-1)^{m-1} - \text{etc.}$$

servira à déterminer les coefficiens A, B, C, etc. On trouve

$$A = \frac{a}{m+1},\ B = \tfrac{1}{2}a,\ C = \tfrac{1}{6}am,\ \text{etc.},$$

et

$$S = \frac{a}{m+1}n^{m+1} + \tfrac{1}{2}an^m + \tfrac{1}{6}am \cdot n^{m-1} + \text{etc.}$$

Soit la série

$$1^m,\ 2^m,\ 3^m,\ 4^m,\ 5^m,\ \text{etc.},$$

dont le terme général est n^m, on aura $a = 1$, et la somme

$$S = \frac{1}{m+1}n^{m+1} + \tfrac{1}{2}n^m + \tfrac{1}{6}mn^{m-1} + \text{etc.}$$

or, si on suppose que la série proposée ne s'arrête pas, le nombre des termes sera plus grand qu'aucun nombre donné, et par conséquent on pourra négliger toutes les puissances de n inférieures à la puissance $m+1$, ensorte qu'on aura pour limite de la somme (Alg. 1ere section)

$$S = \frac{1}{m+1}n^{m+1}.$$

151. Cherchons la quadrature de l'espace circulaire $CBMP$, compris entre le rayon CB perpendiculaire à CA, l'ordonnée parallèle MP, l'arc BM, et l'abscisse CP. A cet effet, nous décomposerons cet espace en rectangles Ch, il, mn, etc., dont

Fig. 95.

les bases *Ci*, *im*, *mp*, etc. soient égales, et telles que représentant l'une d'elles par e et l'abscisse CP par x, on ait $\frac{x}{e}$ plus grand qu'aucun nombre donné : on aura pour expressions de leurs surfaces

$$Ch = e\sqrt{a^2 - e^2},\ il = e\sqrt{a^2 - 4e^2},\ mn = e\sqrt{a^2 - 9e^2},\ \text{etc.}$$

a désignant le rayon du cercle ; si on les développe, on trouvera

$$\begin{aligned} CBMP = {} & ae\ (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.}) \\ & - \frac{e^3}{2a}\ (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \text{etc.}) \\ & - \frac{e^5}{8a^3}\ (1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + \text{etc.}) \\ & - \frac{e^7}{16a^5}\ (1^6 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + 5^6 + \text{etc.}) \\ & - \frac{5e^9}{128a^7}\ (1^8 + 2^8 + 3^8 + 4^8 + 5^8 + \text{etc.}) \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Or les séries entre parenthèses, sont toutes comprises dans celle que nous avons sommée (150), et de plus, elles ne s'arrêtent pas ; on en aura donc les termes sommatoires en faisant dans S successivement $m = 0, = 1, = 2$, etc., et $n = \frac{e}{x}$ nombre de termes de chaque série : ainsi

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + \left(\frac{x}{e}\right)^0 &= \frac{x}{e} \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{x}{e}\right)^2 &= \frac{x^3}{3e^3} \\ 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots\ldots + \left(\frac{x}{e}\right)^4 &= \frac{x^5}{5e^5} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Donc l'espace cherché

$$CBMP = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \text{etc.}$$

Si dans cette suite convergente, on fait $x = a$, on obtient le quart de cercle ACB. Si de l'espace $CBMP$, on retranche la surface du triangle MCP qui est $\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$, la différence est la surface du secteur BMC; enfin, si on divise celle-ci par $\frac{1}{4}a$, le quotient est l'arc BM exprimé par

$$x + \frac{x^3}{2.3.a^2} + \frac{3x^5}{2.4.5a^4} + \text{etc.}$$

série connue, et qui devient l'arc de 100° pour le rayon $= 1$, en y faisant $x = a = 1$.

152. Soit maintenant l'espace elliptique $CBMP$, compris entre le petit axe $CB = b$, l'ordonnée $MP = y$, l'abscisse $CP = x$, et l'arc elliptique MB : en appliquant ici ce que nous avons dit du cercle et désignant le demi-grand axe par a, on trouvera

Fig. 96.

$$CBMP = \frac{b}{a}\left(ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \text{etc.}\right) :$$

or si sur AA', comme diamètre, on décrit une demi-circonférence $A'bA$, on vient de voir que l'espace

$$CbNP = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \text{etc.} :$$

donc

$$\frac{CBMP}{CbNP} = \frac{b}{a} = \frac{CBA}{CbA},$$

en faisant $x = a$: d'où il suit que la surface entière de l'ellipse est à celle du cercle décrit sur son grand axe dans le rapport de b à a: or la surface de ce cercle $= a^2\pi$, π étant le rap-

port de la circonférence au diamètre 1 ; donc la surface de l'ellipse étant désignée par E, on a

$$E = ab.\tau :$$

Ainsi on ne peut avoir qu'une valeur approchée de l'aire de l'ellipse.

On voit aussi qu'à cause de

$$CBMP = \frac{b}{a} CbNP, \quad CBMA = \frac{b}{a} CbNA,$$

on a

$$PMA = \frac{b}{a} PNA;$$

les triangles CPM et CPN sont dans le rapport $b : a$; ainsi

$$CPM = \frac{b}{a} CPN;$$

donc

$$\text{sect } CBM = \frac{b}{a} . \text{ sect } CbN.$$

153. Proposons-nous maintenant de quarrer l'espace parabolique AMP.

Si on fait $AP = x$, $PM = y$, le paramètre $= p$, et Fig. 97.
qu'on suppose toujours que e étant la base constante des trapèzes dans lesquels on décompose APM, on ait $\frac{x}{e}$ plus grand qu'aucune ligne donnée, on trouvera par le même raisonnement que ci-dessus,

$$APM = e\sqrt{pe} + e\sqrt{2pe} + e\sqrt{3pe} + e\sqrt{4pe} + \text{etc.} + e\sqrt{px}$$

$$= e\sqrt{pe}\left\{1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + 4^{\frac{1}{2}} + \ldots\ldots + \left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= e\sqrt{pe} \times \frac{\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x\sqrt{px} = \frac{2}{3} xy.$$

donc l'espace parabolique AMP est les deux tiers du rectangle circonscrit $APMN$, et conséquemment l'espace AMN en est le tiers.

Soient x', y' les coordonnées AP', $P'M'$, on aura

$$AP'M' = \tfrac{2}{3}x'y',\ APM = \tfrac{2}{3}xy,$$

et conséquemment l'espace limité par les ordonnées PM, $P'M'$, l'arc MM' et le segment PP', c'est-à-dire,

$$PMM'P' = \tfrac{2}{3}(x'y' - xy).$$

154. Il nous reste à trouver la quadrature de l'hyperbole.

L'équation de l'hyperbole, rapportée au second axe BB', comme axe des abscisses, est, en faisant $CQ = x$, $QM = y$, et désignant toujours le demi-grand axe par a, et le demi petit axe par b, Fig. 98.

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{bb + xx};$$

si on procède comme on l'a fait dans le cercle et l'ellipse, on trouvera l'espace.

$$ACQM = E = \frac{a}{b}\left(bx + \frac{x^3}{6b} - \frac{x^5}{40b^3} + \frac{x^7}{112b^5} + \text{etc.}\right);$$

il est donc facile d'avoir l'espace $AMP = xy - ACQM$.

En passant à l'hyperbole équilatère, $b = a$, et l'espace E' correspondant à $ACQM$, que nous désignerons par E, sera

$$E' = bx + \frac{x^3}{6b} - \frac{x^5}{40b^3} + \frac{x^7}{112b^5} + \text{etc.}$$

ensorte qu'on aura

$$E = \frac{a}{b}E'.$$

relation de même espèce que celle qui a lieu entre les aires correspondantes de l'ellipse et du cercle. Si donc on avait la

quadrature exacte d'une seule hyperbole, on aurait celle de toutes les autres.

Soit une hyperbole rapportée aux asymptotes CX, CY que nous supposerons à angle droit; il s'agit d'évaluer l'espace asymptotique $ADPM$. Fig. 99.

Dans l'hypothèse que nous faisons, on a $CD = \frac{A}{\sqrt{2}} = m$; si donc on compte les abscisses t du point D, et qu'on désigne PM par u, l'équation de l'hyperbole sera (147)

$$u = \frac{m^2}{m+t};$$

ainsi la base du trapèze élémentaire Dm étant toujours e, on aura pour sa surface $\frac{em^2}{m+e}$; celle du suivant sera..... $\frac{em^2}{m+2e}$, et ainsi de suite, et le nombre de ces expressions sera encore $\frac{t}{e}$: on aura donc l'espace

$$\begin{aligned} ADPM &= em\left(1+1+1+1+1+1+\text{etc.}\right) \\ &\quad - e^2\left(1+2+3+4+5+\ldots+\frac{t}{e}\right) \\ &\quad + \frac{e^3}{m}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+\frac{t^2}{e^2}\right) \\ &\quad - \text{etc.} \\ &= em\frac{t}{e} - e^2\frac{t^2}{2e^2} + \frac{e^3}{m}\cdot\frac{t^3}{3e^3} - \frac{e^4}{m^2}\cdot\frac{t^4}{4e^4} + \text{etc.} \\ &= mt - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3m} - \frac{t^4}{4m^2} + \frac{t^5}{5m^3} - \text{etc.} \\ &= m^2\left\{\frac{t}{m} - \frac{t^2}{2m^2} + \frac{t^3}{3m^3} - \frac{t^4}{4m^4} + \text{etc.}\right\} \\ &= m^2 l\left(1+\frac{t}{m}\right) = m^2 l\left(\frac{m+t}{m}\right), \end{aligned}$$

(Alg. 2e sect.); donc si on fait $CP = z = m + t$, on aura

$$ADPM = m^2 l \frac{z}{m},$$

l désignant *logarithme* (2e sect. alg.). Si l'angle fait par les asymptotes est $\mathcal{C}$, on a

$$ADPM = m^2 \sin \mathcal{C} . l. \frac{z}{m}.$$

Si l'hyperbole est équilatère, et si la puissance = 1, alors l'espace

$$ADPM = l.z.$$

Cet espace est donc le logarithme de l'abscisse CP, et c'est ce qui a fait donner la dénomination de logarithmes hyperboliques à ceux dont le module = 1.

Ce même espace serait le logarithme tabulaire de l'abscisse CP, si l'angle des asymptotes était de 25° 44′ 23″ (ancienne division); car appelant A le module, il faut qu'on ait

$$m^2 \sin \mathcal{C} . l. \frac{z}{m} = Al.z;$$

or cette équation emporte nécessairement les conditions $m = 1$,

$$\sin \mathcal{C} = A = 0,43429448 \text{ etc.}$$

qui, dans les tables de sinus naturels, répond à l'angle ci-dessus.

Dans l'hyperbole équilatère, on a

$$ACPM = \frac{m^2}{2} + m^2 l \frac{z}{m};$$

de l'aire $ACPM$, on retranche la surface du triangle

$MCP = \frac{zu}{2} = \frac{m^2}{2}$, (147), il restera

$$ACM = m^2 l \frac{z}{m} . = ADMP.$$

Pour repasser des coordonnées u et z aux coordonnées x, y de l'hyperbole toujours équilatère, rapportée au centre et aux axes principaux, on observera que

$$\overline{CM}^2 = z^2 + u^2 = x^2 + y^2;$$

ajoutant $2zu$ au premier membre et $2m^2$ au second, il viendra

$$x^2 + y^2 + 2m^2 = u^2 + 2zu + z^2;$$

mais d'ailleurs

$$y^2 = x^2 - A^2 = x^2 - 2m^2,$$

à cause de $\frac{A}{\sqrt{2}} = m$; or, par la substitution de cette valeur de y^2, l'équation précédente devient, après l'extraction de la racine carrée,

$$x\sqrt{2} = u + z = z + \frac{m^2}{z},$$

et conséquemment

$$z = \frac{x + \sqrt{x^2 - 2m^2}}{\sqrt{2}} = \frac{y + \sqrt{y^2 + 2m^2}}{\sqrt{2}},$$

et de là

$$CAM = m^2 l \left\{ \frac{x + \sqrt{x^2 - 2m^2}}{m\sqrt{2}} \right\} = m^2 l \left\{ \frac{y + \sqrt{y^2 + 2m^2}}{m\sqrt{2}} \right\}.$$

On pourra donc évaluer les espaces

$$AP'M = \frac{CP' . P'M}{2} - CAM,$$

$$ACQM = \frac{CQ . QM}{2} + CAM$$

déjà trouvés plus haut.

CHAPITRE XVII.

Des surfaces courbes du premier ordre.

155. On a vu dans ce qui précède, que les équations du premier degré entre trois variables, représentent des surfaces planes ou des plans, comme les équations linéaires entre deux variables représentent des lignes droites; en passant de celles-ci aux lignes courbes du premier ordre, l'équation prend trois termes de plus, savoir, les termes qui renferment les carrés et le rectangle des variables; l'analogie porte donc à penser qu'on passera des plans à des surfaces courbes qui seront dites du premier ordre, en ajoutant à l'équation du plan, les carrés et les rectangles des variables. Ainsi nous considérerons cette équation la plus générale du second degré entre trois variables

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Kz=L$$

ou divisant par L

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fxz+gx+hy+kz=1 \ldots (a)$$

les axes des x, y, z étant rectangulaires.

Puisque deux des variables peuvent se prendre à volonté, on pourra résoudre l'équation par rapport à la troisième, par exemple, par rapport à z; et donnant à chacune des deux autres x, y toutes les valeurs possibles, on conclura, pour chaque hypothèse, une valeur de z, et par conséquent un point de la surface.

On peut par la transformation des coordonnées, réduire l'équation (*a*). à la forme

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 - 1 = 0$$

sans cesser de prendre les plans coordonnés perpendiculaires entre eux.

Si dans l'équation (*a*) on substitue pour x, y, z ces formules trouvées (28), en y supposant $\varphi = 0$,

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\downarrow + y' \cos\theta \sin\downarrow + z' \sin\theta \sin\downarrow \\ y &= -x' \sin\downarrow + y' \cos\theta \cos\downarrow + z' \sin\theta \cos\downarrow \\ z &= -y' \sin\theta + z' \cos\theta \end{aligned}$$

on obtiendra une transformée du second degré en x', y', z' dans laquelle les coefficiens des variables, renfermeront les angles $\downarrow$ et θ; les facteurs des rectangles xz, yz, égales à zéro, seront

$$(b)\ldots 2(a-b)\sin\theta\sin\downarrow\cos\downarrow + \cos\theta(f\cos\downarrow - e\sin\downarrow) - d\sin\theta(\sin^2\downarrow - \cos^2\downarrow) = 0$$

$$(c)\ldots 2\sin\theta\cos\theta(a\sin^2\downarrow + b\cos^2\downarrow + d\sin\downarrow\cos\downarrow - c) - (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(f\sin\downarrow + e\cos\downarrow) = 0$$

et il s'agit de prouver la réalité des angles $\downarrow$ et θ. À cet effet, qu'on divise (*b*) par $\cos\theta$ et (*c*) par $\sin\theta\cos\theta$, et on aura ces quotiens

$$(b')\ldots 2(a-b)\sin\downarrow\cos\downarrow\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - d\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(\sin^2\downarrow - \cos^2\downarrow) + f\cos\downarrow - e\sin\downarrow = 0$$

$$(c')\ldots 2(a\sin^2\downarrow + b\cos^2\downarrow + d\sin\downarrow\cos\downarrow - c) - \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)(f\sin\downarrow + e\cos\downarrow) = 0$$

l'équation (b') donne

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tang}\theta = \frac{e\sin\downarrow - f\cos\downarrow}{2(a-b)\sin\downarrow\cos\downarrow - d(\sin^2\downarrow - \cos^2\downarrow)}$$

substituant cette valeur de tang θ dans (c'), elle devient

$$\frac{2(a\sin^2\downarrow + b\cos^2\downarrow + d\sin\downarrow\cos\downarrow - c)}{f\sin\downarrow + e\cos\downarrow} = \frac{e\sin\downarrow - f\cos\downarrow}{2(a-b)\sin\downarrow\cos\downarrow - d(\sin^2\downarrow - \cos^2\downarrow)} - \frac{2(a-b)\sin\downarrow\cos\downarrow - d(\sin^2\downarrow - \cos^2\downarrow)}{e\sin\downarrow - f\cos\downarrow}$$

on

$$(f\sin\downarrow + e\cos\downarrow)[(e\sin\downarrow - f\cos\downarrow)^2 - (2(a-b)\sin\downarrow\cos\downarrow - d(\sin^2\downarrow - \cos^2\downarrow))^2] = 2(e\sin\downarrow - f\cos\downarrow)(2(a-b)\sin\downarrow\cos\downarrow - d(\sin^2\downarrow - \cos^2\downarrow))(a\sin^2\downarrow + b\cos^2\downarrow + d\sin\downarrow\cos\downarrow - c)$$

ou

$$(f\sin\downarrow + e\cos\downarrow)(e\sin\downarrow - f\cos\downarrow)^2 - (2(a-b)\sin^2\downarrow\cos\downarrow - d(\sin^2\downarrow - \cos^2\downarrow))$$

$$\left[\begin{array}{l} 2(a-b)\sin\downarrow\cos\downarrow - d(\sin^2\downarrow - \cos^2\downarrow)(f\sin\downarrow + e\cos\downarrow) \\ +2(e\sin\downarrow - f\cos\downarrow)(a\sin^2\downarrow + b\cos^2\downarrow + d\sin\downarrow\cos\downarrow - c) \end{array}\right] = 0$$

divisant cette équation par $\cos^3\downarrow$, on trouve

$$\left(f\frac{\sin\downarrow}{\cos\downarrow} + e\right)\left(e\frac{\sin\downarrow}{\cos\downarrow} - f\right)^2 - \cos^2\downarrow\left(2(a-b)\frac{\sin\downarrow}{\cos\downarrow} - d\left(\frac{\sin^2\downarrow}{\cos^2\downarrow} - 1\right)\right)$$

$$\left[\left(2(a-b)\frac{\sin\downarrow}{\cos\downarrow} - d\left(\frac{\sin^2\downarrow}{\cos^2\downarrow} - 1\right)\right)\left(f\frac{\sin\downarrow}{\cos\downarrow} + e\right) + 2\left(e\frac{\sin\downarrow}{\cos\downarrow} - f\right)\left(a\frac{\sin^2\downarrow}{\cos^2\downarrow} + b + d\frac{\sin\downarrow}{\cos\downarrow} - \frac{c}{\cos^2\downarrow}\right)\right] = 0.$$

Faisant $\frac{\sin \downarrow}{\cos \downarrow} = \text{tang} \downarrow = u$, d'où $\cos^2 \downarrow = \frac{1}{1+u^2}$ cette dernière équation devient, après les multiplications et les réductions

$$(d)\ldots(fu+e)(eu-f)^2-(2u(a-b)-du^2+d)$$
$$(de+2cf-2bf+u(2ae-2ce-df))=0$$

Or cette équation (d) étant du troisième degré, ou d'un degré impair, donne, au moins, une valeur réelle de tang $\downarrow$, et l'angle $\downarrow$ étant déterminé, l'équation (b) qui n'est que du premier degré par rapport à tang θ, donnera aussi une valeur réelle de cette tangente. Ainsi, par cette première transformation et désignant les nouvelles coordonnées par x, y, z, l'équation (a) sera réduite à la forme

$$a'x^2+b'y^2+c'z^2+d'xy+g'x+h'y+k'z=1\ldots(e)$$

Il sera facile de faire disparaître le rectangle xy, et à cet effet, il suffira de changer la direction des axes des x, y dans leur plan, ou de remplacer x, y par ces formules (28)

$$x=x,\cos\varphi+y,\sin\varphi,\quad y=-x,\sin\varphi+y,\cos\varphi:$$

si on égale à zéro le coefficient du rectangle xy de cette transformée, on trouvera

$$2\sin\varphi\cos\varphi\times G+K(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)=0$$

G et K étant fonctions de a', b', c' etc. : on tire de là

$$G\sin 2\varphi-K\cos 2\varphi=0$$

équation qui donnera une valeur réelle pour tang 2α. On aura donc cette réduite

$$a''x^2,+b''y^2,+c''z^2,+g''x,+h''y,+k''z,=1\ldots(f).$$

Enfin on sait qu'en changeant l'origine des coordonnées, on peut faire disparaître les termes de première dimension par

rapport aux variables, par les hypothèses

$$x_1 = \alpha + x,\ y_1 = \zeta + y,\ z_1 = \gamma + z$$

et cela fait, la proposée sera réduite à

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 - 1 = 0,$$

les cordonnées x, y, z étant rectangulaires. Il suit de cette analyse, que les surfaces du second degré ont trois plans diamétraux conjugués perpendiculaires entre eux : on démontre de plus, que ces surfaces ne peuvent avoir que trois de ces plans ; mais notre objet n'étant pas de donner une doctrine complète de ces surfaces, nous renverrons pour de plus amples détails, aux leçons de *Monge*, à l'école Polytechnique.

156. Nous nous bornerons à faire entrevoir l'existence d'une infinité de plans diamétraux obliques conjugués, analogues aux diamètres conjugués des sections coniques. L'équation (a) résolue par rapport à z, donne

$$z = -\frac{ey + fx + k}{2c} \pm \sqrt{\qquad\qquad}$$

par rapport à y, donne

$$y = -\frac{dx + ez + h}{2b} \pm \sqrt{\qquad\qquad}$$

et par rapport à x, donne

$$x = -\frac{dy + fz + g}{2a} \pm \sqrt{\qquad\qquad}$$

Or les parties rationnelles de ces valeurs, étant représentées par Z, Y, X, on aura ces trois plans

$$Z = -\frac{ey + fx + k}{2c}$$

$$Y = -\frac{dx + ez + h}{2b}$$

$$X = -\frac{dy + fz + g}{2a}$$

dont chacun divise également les doubles transversales limitées par la surface, et parallèles aux axes des z, des y et des x : ces plans symétriques se coupent au centre de cette surface. En effet, si on dénote z et Z par γ, y et Y par ζ, x et X par α, ces équations deviendront

$$2c\gamma+e\zeta+f\alpha+k=0, 2b\zeta+d\alpha+e\gamma+h=0, 2a\alpha+d\zeta+f\gamma+g=0,$$

les mêmes qu'on aurait obtenues par l'égalité à zéro des termes de première dimension en x', y' et z' de la transformée déduite de (a) par la substitution de $x'+\alpha$ pour x, $y'+\zeta$ pour y, $z'+\gamma$ pour z; et on sait que par ces substitutions l'origine est portée au centre de la courbe. Mais si l'on passe des coordonnées rectangulaires auxquelles est rapportée la surface par l'équation (a), à des coordonnées obliques quelconques, le degré de la transformée sera le même que celui de la proposée, puisque les premières coordonnées sont exprimées linéairement au moyen des secondes, et résolvant cette transformée successivement par rapport à z', y', z', les parties rationnelles donneront ces nouveaux plans

$$Z'=-\frac{e'y'+f'x'+k'}{2c'},$$

$$Y'=-\frac{d'x'+e'z'+h'}{2b'},$$

$$X'=-\frac{d'y'+f'z+g'}{2a'},$$

en nombre indéfini, symétriques et se coupant au centre comme les premiers, ainsi qu'il serait facile de le démontrer.

On pourrait encore se proposer de rechercher s'il n'existe pas des systèmes d'axes obliques par rapport auxquels l'équation de la surface, conserve la forme

$$Lx^2+My^2+Nz^2-1=0;$$

à cet effet, on substituerait pour x, y, z ces formules

$$x = x' \cos X + y' \cos X' + z' \cos X''$$
$$y = x' \cos Y + y' \cos Y' + z' \cos Y''$$
$$z = x' \cos Z + y' \cos Z' + z' \cos Z''$$

ou X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', Y'', Z'' désignent les angles que font les nouveaux axes x', y', z' avec les axes primitifs des x, y et z, et égalant à zéro les coefficiens des rectangles xy, yz, xz qui ne doivent pas se trouver dans la transformée, on a ces trois conditions

$$M \cos Z \cos Z' + M' \cos Y \cos Y' + M'' \cos X \cos X' = 0,$$
$$M \cos Z \cos Z'' + M' \cos Y \cos Y'' + M'' \cos X \cos X'' = 0,$$
$$M \cos Z' \cos Z'' + M' \cos Y' \cos Y'' + M'' \cos X' \cos X'' = 0;$$

auxquelles il faut joindre les suivantes qui ont lieu ( ) entre les trois angles que fait une ligne droite avec les trois axes des x, y et z

$$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1,$$
$$\cos^2 X' + \cos^2 Y' + \cos^2 Z' = 1,$$
$$\cos^2 X'' + \cos^2 Y'' + \cos^2 Z'' = 1.$$

Ces six équations renferment neuf indéterminées, ensorte qu'il en reste trois absolument arbitraires. Il existerait donc une infinité de systèmes d'axes obliques qui rempliraient la condition énoncée.

157. Nous chercherons la ligne qui est le lieu des centres des sections déterminées dans la surface, par une suite de plans parallèles.

Reprenons l'équation de la surface rapportée au centre et à des plans rectangulaires,

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 - 1 = 0 \ldots (1)$$

et soit

$$z = Ax + By + D \ldots\ldots\ldots (2)$$

l'équation du plan sécant : si dans (1) on met pour z sa valeur donnée par (2), l'équation résultante étant indépendante de z, c'est-à-dire, ne renfermant plus que les coordonnées x et y des points communs à la surface et au plan, ne pourra plus que représenter la projection de la courbe d'intersection, sur le plan des x, y. Il faut bien entendre que par cette élimination de z, on ne considère que les points communs à la surface et au plan, mais en tant qu'il n'est plus question de leur hauteur au-dessus du plan des x, y. La projection de cette courbe d'intersection a donc pour équation

$$(L+NA^2)x^2+(M+NB^2)y^2+2ABNxy + 2ADNx+2BDNy+ND^2-1=0 \ldots (3)$$

ses diamètres sont représentés par

$$(4)\ldots x=\frac{-AN(By+D)}{L+NA^2},\quad y=\frac{-BN(Ax+D)}{M+NB^2}\ldots(5)$$

si on élimine D entre ces deux équations, la résultante représentera la ligne qui est le lieu des projections des centres des sections déterminées par une suite de plans parallèles, en observant que le centre d'une projection n'est autre que la projection du centre : cette équation est

$$\frac{(L+Na^2)x+ABNy}{(M+NB^2)y+ABNx}=\frac{A}{B}\ldots(6)$$

mettant dans l'équation du plan pour D sa valeur tirée de (4) ou (5), on aura pour seconde équation de la droite

$$z=\frac{M}{BN}y\ldots\ldots(7)$$

ces deux équations n'ayant pas de terme constant; appartiennent à une droite qui passe par l'origine; cette droite passe donc

par le centre de la surface et, en même temps, par ceux de toutes les sections parallèles; elle est un diamètre.

158. Supposons successivement $y=0$, $z=0$; $x=0$, $z=0$; $x=0$, $y=0$; et désignons par a, b, c les valeurs correspondantes de x, y, z déduites de l'équation

$$Lx^2 + My^2 + Mz^2 = 1,$$

on aura $L=\frac{1}{a^2}$, $M=\frac{1}{b^2}$, $N=\frac{1}{c^2}$; ensorte que l'équation de la surface, énoncée au moyen des axes principaux des sections faites par les plans des coordonnées, prendra cette forme

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2$$

et alors il y aura lieu à distinguer trois cas relativement aux signes des termes qui ne dépendent plus des coefficiens essentiellement positifs : on aura donc à considérer

$$(1°)\quad b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2 \ldots \quad (M)$$
$$(2°)\quad b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2 \ldots \quad (M')$$
$$(3°)\quad b^2c^2x^2 - a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2 \ldots \quad (M'')$$

ou

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 1 \ldots\ldots \quad (M)$$
$$Lx^2 + My^2 - Nz^2 = 1 \ldots\ldots \quad (M')$$
$$Lx^2 - My^2 - Nz^2 = 1 \ldots\ldots \quad (M'')$$

A chaque équation (M), (M'), (M'') correspond une forme particulière de la surface : considérons d'abord celle dont tous les termes sont positifs, ou l'équation (M), et cherchons à reconnaître si elle est finie, ou rentrante sur elle-même, infinie dans un sens seulement, ou illimitée dans les deux sens.

1°. *Surface illimitée dans tous les sens, ou ellipsoïde.*

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 1$$

ou

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2$$

159. Qu'on mène par l'origine des coordonnées une droite quelconque dont les équations soient

$$x = \alpha z, \quad y = \zeta z ;$$

en substituant ces valeurs de x et y dans (M), on aura pour la valeur de z, correspondante au point d'intersection de la surface et de la droite

$$z = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\zeta^2 + a^2b^2}} :$$

Or quelles que soient les constantes α, ζ le radical ne peut devenir nul ; d'où il suit que les valeurs des coordonnées de l'intersection ne peuvent jamais devenir infinies ; donc la surface est fermée : on la nomme *Ellipsoïde*.

Les sections principales de l'ellipsoïde, celles qui sont déterminées par les plans des coordonnées, et qu'on obtient en faisant successivement chacune de ces hypothèses $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ sont des ellipses qui ont pour équations

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \; z^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - x^2), \; z^2 = \frac{c^2}{b^2}(b^2 - y^2).$$

Les axes $2a$, $2b$, $2c$ de ces ellipses sont aussi les axes de la surface ; les points où ces axes rencontrent la surface en sont les sommets.

Pour avoir les intersections par des plans respectivement parallèles aux plans coordonnés, il faut, dans l'équation (M), écrire successivement

$$x = \alpha, \; y = \zeta, \; z = \gamma$$

α, $\mathcal{C}$, γ étant des constantes, ensorte que ces intersections seront représentées par

$$My^2 + Nz^2 + L\alpha^2 = 1$$
$$Lx^2 + Nz^2 + M\mathcal{C}^2 = 1$$
$$Lx^2 + My^2 + N\gamma^2 = 1$$

elles sont donc des ellipses.

160. Le plan coupant passant par l'axe des z, a pour équations de sa trace sur celui des xy

$$x = r\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\varphi$$

r étant l'abscisse comptée de l'origine sur la trace, et φ l'angle de cette trace avec l'axe des x; substituant ces valeurs de x et y dans (M), on aura l'équation de l'intersection de la surface par ce plan, qui est

$$Nz^2 + r^2\,(M\sin^2\varphi + L\cos^2\varphi) = 1\,;$$

elle représente donc des ellipses différentes, suivant les différentes valeurs attribuées à φ. Si $M = L$, auquel cas $b = a$, à cause de $L = \frac{1}{a^2}$, $M = \frac{1}{b^2}$, alors l'équation précédente devient

$$Nz^2 + Mr^2 = 1\,;$$

toutes les sections faites dans la surface par des plans menés par l'axe des z, sont donc égales entre elles; cette surface est donc de révolution autour de l'axe des z; ses sections par des plans parallèles à celui des xy, deviennent des circonférences de cercle. Les hypothèses $L = N$, $N = M$ donneraient des ellipses de révolution autour des autres axes. Enfin, pour $N = M = L$, l'équation (M) devient celle d'une sphère.

A mesure que les axes $2a$, $2b$, $2c$ augmentent, les coefficiens L, M, N diminuent : si $2a$ devient infini, le coefficient L devient nul : alors l'ellipsoïde se change en un cylindre dont l'axe est suivant celui des x, lequel a pour équation

$$My^2 + Nz^2 = 1\,;$$

la base de ce cylindre est l'ellipse

$$z^2 = \frac{c^2}{b^2}(b^2 - y^2)$$

située dans le plan des z, y : on peut remarquer que l'équation de ce cylindre n'est que celle de la trace, ou de sa base ; c'est ainsi que l'équation d'un plan perpendiculaire à l'un des plans coordonnés, se réduit à l'équation de sa trace sur ce plan. Si de plus $M = N$, d'où résulte $c = b$, le cylindre devient

$$y^2 + z^2 = \frac{1}{M},$$

et sa base est le cercle

$$z^2 = b^2 - y^2 :$$

c'est le cylindre droit à base circulaire, ou le cylindre de la géométrie.

Enfin, que $L = M = 0$, l'équation de l'ellipsoïde n'est plus que

$$Nz^2 = 1 \text{ ; d'où } z = \pm\sqrt{\frac{1}{N}} = \pm c ;$$

elle représente deux plans parallèles à celui des x, y, situés l'un au-dessus, l'autre au-dessous, à des distances égales entre elles et égales à c.

Surfaces indéfinies dans tous les sens.

$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2$; $b^2c^2x^2 - a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2$.

ou

$$Lx^2 + My^2 - Nz^2 = 1 ; \; Lx^2 - My^2 - Nz^2 = 1.$$

161. Le second genre des surfaces du second degré, est compris dans l'équation (M') dont les deux premiers termes sont

positifs, et le troisième négatif : les trois sections principales de cette surface, celles qui sont déterminées par les plans coordonnés, ont pour équations

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), z^2 = \frac{c^2}{a^2}(x^2 - a^2)\ z^2 = \frac{c^2}{b^2}(y^2 - b^2);$$

la première est une ellipse et les deux autres sont des hyperboles. De là on peut conclure que cette surface n'est pas fermée, ce qu'on peut encore démontrer en imaginant par l'origine des coordonnées, une droite

$$x = \alpha z, \quad y = \zeta z$$

qui coupe la surface en un point dont les coordonnées sont

$$\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\zeta^2 - a^2b^2}}, \alpha \cdot \frac{abc}{\sqrt{\quad}}, \zeta \cdot \frac{abc}{\sqrt{\quad}};$$

faisant le radical nul, ce qui rend infinies les valeurs des coordonnées, on a

$$b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\zeta^2 - a^2b^2 = 0$$

d'où l'on tire

$$\zeta = \frac{b\sqrt{a^2 - c^2\alpha^2}}{ac}$$

valeur de ζ qui sera réelle, pour $\alpha < \frac{a}{c}$. Les équations de la droite qui coupe la surface en un point situé à une distance infinie de l'origine des coordonnées, deviennent donc

$$x = \alpha z, \quad y = \frac{bz\sqrt{a^2 - c^2\alpha^2}}{ac};$$

si on élimine α entre ces équations, celle qui en résultera étant indépendante de α et ζ, conviendra à toutes les posi-

tions de la droite, c'est-à-dire, qu'elle appartiendra à une surface conique dont le sommet est à l'origine des coordonnées, et qui est asymptote à la surface : on trouve que cette surface conique est exprimée par

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = 0,$$

premier membre de l'équation (M'). C'est ainsi que, par rapport à l'hyperbole rapportée au centre et aux axes principaux, l'équation des asymptotes (76, 143).

$$y = \pm\frac{B}{A}x, \text{ d'où } A^2y^2 - B^2x^2 = 0$$

n'est que le premier membre de celle de l'hyperbole

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2,$$

et on pourrait les déduire par une considération analogue. La surface que nous considérons ici se nomme *hyperboloïde à une nappe*.

En cherchant les intersections de cette surface par les axes des coordonnées, on trouvera les trois axes donnés par $y = 0$, $x = 0$; $x = 0$, $z = 0$; $z = 0$, $y = 0$, dont les deux derniers sont réels et le premier c est imaginaire; cet axe ne rencontre donc pas la surface.

162. Pour mieux connaître la forme de cette surface, qu'on fasse les substitutions

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

et on trouvera

$$Nz^2 - r^2(L\cos^2\varphi + M\sin^2\varphi) = 1;$$

équation d'une hyperbole : donc tous les plans par l'axe des z, coupent cette surface suivant des hyperboles.

Lorsque $M=L$, auquel cas $b=a$, les sections faites par le plan des xy et par des plans parallèles, deviennent des circonférences de cercle; en effet, on obtient ces dernières en faisant $z=\gamma$ dans (M') ce qui donne

$$Lx^2+My^2-N\gamma^2-1=0, \text{ ou } x^2+y^2=\frac{N\gamma^2+1}{M^2};$$

et celles qui résultent des plans menés par l'axe des z, sont toujours des hyperboles,

$$Nz^2-Mr^2=1;$$

donc l'hyperboloïde est de révolution autour de cet axe.

Lorsque l'axe a est infini, $L=0$, et l'équation (M') qui se réduit alors à

$$My^2-Nz^2=1, \text{ ou } Nz^2-My^2=-1,$$

représente un cylindre perpendiculaire au plan des zy, cylindre dont la base, ou la section par le plan des zy, est une hyperbole.

Nous avons trouvé plus haut cette équation de la surface conique asymptote à l'hyperboloïde

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=0, \text{ ou } Nz^2-My^2-Lx^2=0;$$

sa section par un plan suivant l'axe des z, est

$$Nz^2-r^2(L\cos^2\varphi+M\sin^2\varphi)=0$$

équation qui représente deux lignes droites menées par l'origine, ce qui est le caractère des surfaces coniques; pour $L=M$, c'est-à-dire, pour l'hyperboloïde de révolution autour de l'axe des z, cette surface conique devient

$$Nz^2-Lr^2=0;$$

toutes les génératrices font donc des angles égaux avec l'axe des z; aussi dans ce cas, elle se change dans celle d'un cône droit à base circulaire.

163. Le troisième genre des surfaces du second degré est représenté par (M''), c'est-à-dire, par

$$b^2c^2x^2 - a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2 \text{ ou } Lx^2 - My^2 - Nz^2 = 1.$$

Les sections principales ont pour équations

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2);\ z^2 = \frac{c^2}{a^2}(x^2 - a^2),\ -a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2\ ;$$

les deux premières sont des hyperboles, et la troisième est imaginaire, ce qui indique que la surface a des nappes infinies, entre lesquelles il reste un intervalle, ce qui n'arrive pas dans l'hyperboloïde à une nappe; on a nommé cette surface *hyperboloïde à deux nappes*.

Si on combine l'équation de cette surface avec celles de la droite passant par l'origine des coordonnées

$$x = \alpha z,\quad y = \zeta z,$$

ainsi que nous l'avons fait à l'égard de la première espèce d'hyperboloïde, on trouvera pour les coordonnées de l'intersection

$$\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2\alpha^2 - a^2c^2\zeta^2 - a^2b^2}},\ \alpha\,.\,\frac{abc}{\sqrt{\quad}},\ \zeta\,.\,\frac{abc}{\sqrt{\quad}}$$

et pour le radical égalé à zéro,

$$\zeta = \frac{b\sqrt{c^2\alpha^2 - a^2}}{ac}$$

valeur réelle pour $a^2 < c^2\alpha^2$, et imaginaire sous la relation contraire. Si on élimine α entre les équations

$$x = \alpha z,\ y = \frac{bz\sqrt{c^2\alpha^2 - a^2}}{ac},$$

on aura cette équation finale

$$b^2c^2x^2 - a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = 0;$$

qui est celle d'une surface conique, asymptote de l'hyperboloïde à deux nappes, et dont le sommet est l'origine même des coordonnées.

Cet hyperboloïde n'a que deux sommets réels ; ils sont donnés par $y = 0$, $z = 0$, d'où résulte $x = \pm a$; les deux autres axes, savoir, ceux qui correspondent aux hypothèses $x = 0$, $y = 0$; $x = 0$, $z = 0$, sont imaginaires : ces résultats font partie de la définition de la surface.

Ce qui distingue essentiellement cette surface de la précédente, c'est l'intervalle qui sépare les deux nappes.

164. *Monge* a démontré dans l'ouvrage cité, que toute surface du second degré peut être engendrée de deux manières différentes, par un cercle variable de rayon, dont le centre se meut sur un diamètre de la surface, et dont le plan demeure parallèle à lui-même ; et il tire de là cette conclusion, qu'il n'existe aucun point sur la surface du second degré, par lequel on ne puisse faire passer deux circonférences de cercle qui soient entièrement sur la surface : pour établir cette proposition, il coupe la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

par un plan

$$z = Ax + By$$

et il obtient la projection de la section sur le plan des x, y : coupant ensuite la surface du second degré par le même plan, il en trouve la section projetée sur le même plan x, y, et il identifie ces deux équations des projections par des valeurs réelles de A, B et r qui sont ici les indéterminées de la question, en tenant compte des signes de L, M, N qui sont

les caractéristiques de chaque surface : il trouve par cette analyse ;

1° Que l'ellipsoïde est coupé suivant un cercle par le plan qui passe par l'axe moyen $2b$, et qui fait avec le plan des xy, un angle dont la tangente est $= \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$:

2° Que l'hyperboloïde à une nappe est coupé suivant un cercle par un plan passant par le grand axe $2a$, et faisant avec le plan des xy un angle dont la tangente $= \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}}$;

3° Que l'hyperboloïde à deux nappes peut être coupé suivant des cercles par des plans parallèles à celui qui passerait par l'axe moyen $2b$, et qui ferait avec le plan des xy un angle ayant pour tangente $\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2-c^2}}$.

Des surfaces dépourvues de centre.

165. Si dans l'équation générale (a) on change la direction des coordonnées, en les laissant toujours rectangulaires, et sans déplacer l'origine, on pourra, ainsi qu'on l'a vu, disposer des indéterminées introduites de manière à faire disparaître les rectangles, et par cette opération, on obtiendra la transformée

$$Hx'^2 + H'y'^2 + H''z'^2 + Kx' + K'y' + K''z' = 1 ;$$

alors si on transporte l'origine sans changer la direction des nouveaux axes, ce qui n'introduit pas de termes des rectangles, et pour cela, on posera

$$z' = \gamma + z'', \quad y' = \mathcal{C} + y'', \quad x' = \alpha + x''$$

on disposera des quantités γ, $\mathcal{C}$ et α de manière à faire disparaître le terme tout connu de la transformée précédente,

ce qui donnera cette transformée elle-même en y changeant z' en γ, y' en ζ, x' en α, savoir

$$H\alpha^2 + H'\zeta^2 + H''\gamma^2 + K\alpha + K'\zeta + K''\gamma - 1 = 0; \ldots\ldots (2)$$

d'où l'on conclut déjà que l'origine est sur un point de la surface ; on aura donc après avoir supprimé les accens, cette réduite

$$Hx^2 + H'y^2 + H''z^2 + Px + P'y + P''z = 0 \ldots\ldots (1)$$

dans laquelle les coefficiens P, P', P'' ont ces valeurs

$$(3)\ldots P = 2H\alpha + K, \quad (4)\ldots P' = 2H'\zeta + K', \quad (5)\ldots P'' = 2H''\gamma + K'';$$

supposons donc qu'on ait déterminé les coordonnées du sommet d'après les conditions (2), (4) et (5), ce qui sera possible, si la surface existe ; l'équation (1) deviendra

$$Hx^2 + H'y^2 + H''z^2 + Px = 0 \ldots\ldots (6) :$$

or pour $y = 0$, $z = 0$, on trouve

$$x(Hx + P) = 0, \text{ d'où } x = 0, \quad x = -\frac{P}{H};$$

il faut donc, dans le cas où la surface est dépourvue de centre, que $x = -\frac{P}{H} = \infty$, ou qu'on ait $H = 0$ et de plus que le coefficient P ne soit pas nul ; ainsi cette espèce de surface sera représentée par

$$H'y^2 + H''z^2 + Px = 0.$$

C'est ce qu'on peut encore démontrer autrement. A cet effet, par l'une des extrémités du grand axe $2a$ de l'ellipsoïde

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2,$$

menons des parallèles aux axes principaux $2a$, $2b$, $2c$, les

nouvelles coordonnées d'un point quelconque, comptées sur ces parallèles, seront $x + a = x'$, y et z, ensorte que par ces substitutions dans l'équation précédente, on aura cette transformée

$$b^2c^2x'^2 - 2ab^2c^2x' + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = 0 \ldots (M'');$$

on a déjà vu que l'ellipse intersection de la surface ellipsoïde par le plan x, y, a pour équation

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

et on sait que le demi-paramètre de cette ellipse, c'est-à-dire, l'ordonnée du foyer, est $y = \frac{b^2}{a}$, ensorte que reportant cette valeur de y^2 dans la section de l'ellipsoïde (M'') par le plan x, y, laquelle a pour équation

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

on trouve pour $x = p$, abscisse du foyer,

$$b^2 = 2ap - p^2$$

on aurait de même

$$c^2 = 2ap' - p'^2$$

p' étant la distance de l'origine au foyer de l'autre section faite dans la même surface par le plan xz. Substituant ces valeurs dans (M''), et remplaçant x' par x, on trouve

$$(2ap - p^2)[(2ap' - p'^2)(x^2 - 2ax) + a^2z^2] + a^2(2ap' - p'^2)y^2 = 0.$$

Lorsque le centre s'éloigne à l'infini, les quantités p et p' ne changent pas, a devient ∞, et par-là l'équation devient celle-ci

$$pz^2 + p'y^2 - 4pp'x = 0, \ldots (M''')$$

qui renferme la variable x à la première puissance, et les deux autres au carré. La combinaison des signes de cette équation ne présente que deux cas distincts; celui de p' positif, et celui de p' négatif.

Surfaces indéfinies dans un sens et limitées dans l'autre.

$$z^2 = 4p'x - \frac{p'}{p}y^2 ; \quad z^2 = \frac{p'}{p}y^2 - 4p'x.$$

166. Discutons la première de ces deux équations, savoir,

$$z^2 = 4p'x - \frac{p'}{p}y^2 :$$

les trois sections principales de cette surface, ont pour équation

$$y^2 = 4px , \quad z^2 = 4p'x , \quad z = y\sqrt{\frac{-p'}{p}} :$$

les deux premières sont des paraboles, et la troisième section est imaginaire, ce qui indique que la surface est toute entière d'un même côté du plan des yz.

Toute section faite dans cette surface, parallèlement au plan des yz, est une ellipse, puisque pour $x = m$, on a

$$z^2 + \frac{p'}{p}y^2 = 4mp' ;$$

c'est pour cela qu'on a nommé cette surface *paraboloïde elliptique*.

Lorsque $p = p'$, le paraboloïde est de révolution, parce qu'alors les sections faites par des plans parallèles à celui des yz, ou perpendiculaire au grand axe xa, sont des cercles.

Dans le second cas,

$$z^2 = \frac{p'}{p} y^2 - 4p'x ,$$

et les sections principales ont pour équations

$$y^2 = 4px , \quad z^2 = -4p'x , \quad z = y\sqrt{\frac{p'}{p}} ;$$

les deux premières sections sont des paraboles dont les branches divergent de différens côtés par rapport au plan des xz ; la troisième section est le système de deux droites, faisant avec l'axe des y un angle dont la tangente est $\sqrt{\frac{p'}{p}}$.

Toutes les sections faites dans la surface parallèlement aux plans des xz et des yz, sont des hyperboles, d'où vient qu'on a nommé cette surface *paraboloïde hyperbolique*.

167. Mais on peut aussi rapporter les intersections des surfaces par un plan, à des coordonnées prises dans le plan coupant lui-même, ainsi que nous l'avons fait (chap. VI, 29) à l'égard de l'intersection de la surface conique par un plan.

A cet effet, on supposera $z' = 0$ dans les formules (28), et aux coordonnées x, y, z on ajoutera les coordonnées α, ζ, γ de la nouvelle origine : les élémens de position de ce plan seront les angles θ et $\downarrow$. On substituera donc pour x, y, z ces formules

$$x = x'\cos\downarrow + y'\cos\theta\sin\downarrow + \alpha, \; y = -x'\sin\downarrow + y'\cos\theta\cos\downarrow + \zeta,$$
$$z = -y'\sin\theta + \gamma ,$$

dans cette équation

$$Hx^2 + H'y^2 + H''z^2 + Px + P'y + P''z = 0 ,$$

qui représente en même temps les surfaces qui ont un centre

sences $H - H'$, $H' - H''$ négatives en même temps ; donc le troisième rapport sera positif, et conséquemment l'une des tangentes, au moins, sera réelle. Ainsi toute surface courbe du premier ordre, peut être coupée suivant une circonférence de cercle par un plan dans deux positions différentes déterminées par les angles $\downarrow$ et θ ; et comme les coordonnées $\alpha, \mathcal{C}, \gamma$ d'un des points par lesquels doit passer le plan, ne sont pas déterminées, on conclura encore qu'il existe pour chaque surface, une infinité de plans parallèles qui donnent des sections circulaires, et on pourra même déterminer ces coordonnées $\alpha, \mathcal{C}, \gamma$ de manière que l'origine des nouvelles coordonnées x', y' se trouve au centre de la section circulaire ; cette condition qui rend nuls les coefficiens de x' et y' donne entre $\alpha, \mathcal{C}, \gamma$ deux équations linéaires qui apprennent que, pour chaque surface, les centres de tous ces cercles sont en ligne droite, ainsi qu'on l'a déjà démontré (157). Reste la troisième arbitraire γ, par laquelle les rayons des cercles doivent etre réels ; on la déterminera donc par cette condition. Aussi le cône oblique à base circulaire nous a-t-il offert (ch. VI) une section circulaire par un plan non parallèle à la base.

Des plans tangens aux surfaces courbes du premier ordre.

168. Par un point quelconque pris sur une telle surface, on peut mener une infinité de droites qui n'aient qu'un point commun avec la surface ; l'ensemble de ces droites est le *plan tangent*.

Soient x'', y'', z'' le point de tangence : on a ces trois équations

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 + Cx + C'y + C''z - 1 = 0 \ldots\ldots (1),$$

$$Lx''^2 + My''^2 + Nz''^2 + Cx'' + C'y'' + C''z'' - 1 = 0 \ldots\ldots (2),$$

$$x - x'' = m(z - z''),\ y - y'' = n(z - z'') \ldots\ldots\ldots (3),$$

l'équation du plan tangent devient

$$Lx''x + My''y + Nz''z - 1 = 0,$$

laquelle se change effectivement dans l'équation des surfaces, en y faisant $x = x''$, $y = y''$, $z = z''$.

La droite menée par le point de tangence, perpendiculairement au plan tangent, se nomme *normale* : ses équations seront de la forme

$$x - x'' = m'(z - z''), \quad y - y'' = n'(z - z'');$$

pour qu'elle soit perpendiculaire au plan tangent, il faut qu'on ait (pag. 65)

$$\frac{Lx''}{Nz''} = m'; \quad \frac{My''}{Nz''} = n',$$

valeurs à substituer dans les équations précédentes, pour qu'elles soient celles de la normale : on trouvera aisément que pour $N = L$, auquel cas la surface est de révolution autour des y, la normale rencontre cet axe. Généralement lorsqu'une surface est de révolution autour d'un axe, toutes ses normales rencontrent cet axe.

169. La solution de quelques questions aura l'avantage de familiariser les Elèves avec l'ensemble des considérations qui précèdent, et de leur faire connaître quelques propriétés des surfaces.

1°. *Trouver l'équation de la surface décrite par le sommet d'une pyramide rectangulaire dont les faces glisseraient sur un ellipsoïde, sans cesser de les toucher.*

Supposons que la pyramide se meuve de manière que l'un des trois points de contacts soit fixe ; l'intersection des deux faces décrira un cylindre dont les arêtes seront perpendiculaires à la face qui ne glisse pas ; et l'intersection de ce cylindre avec le plan tangent dont le point de contact ne varie pas, sera une courbe plane tracée toute entière sur la surface cherchée.

Nous rechercherons en premier lieu l'équation de la surface du cylindre. Reprenons, à cet effet, celle de la surface ellipsoïde, qui est

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D,$$

où

$$A = b^2c^2,\ B = a^2c^2,\ C = a^2b^2,\ D = a^2b^2c^2.$$

L'intersection des plans tangens, ou des faces mobiles de la pyramide, c'est-à-dire, de l'arête du cylindre, a pour équations

$$(1)\ldots x = mz + \mu,\quad y = nz + \nu\ldots(2).$$

Soient x', y', z' ; x'', y'', z'' les coordonnées des points de contact des plans tangens qui glissent : l'équation du premier plan tangent sera

$$Ax'x + By'y + Cz'z = D\ldots\ldots(3).$$

Pour dire que l'arête est dans ce plan, on ramènera d'abord le plan et l'arête à passer par l'origine, et à cet effet on posera ces équations

$$z = -\frac{Ax'}{Cz'}\,x - \frac{By'}{Cz'}\,y,\ x = mz,\ y = nz,$$

qui donnent

$$Amx' + Bny' + Cz' = 0\ldots\ldots(4) ;$$

en second lieu, on écrira que les équations (1), (2) et (3) ont lieu pour $z = 0$, d'où résultera

$$A\mu x' + B\nu y' = D\ldots(5) ;$$

et parce que le point x', y', z' est sur l'ellipsoïde, on aura de plus

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = D\ldots(6).$$

Des équations (4) et (5) on déduit ces valeurs

$$x' = \frac{Dn + C\nu . z'}{-A\gamma}, \; y' = \frac{Dm + C\mu z'}{B\gamma},$$
$$x' = \frac{D - B\nu y'}{A\mu}, \; z' = \frac{Dm - B\gamma y'}{-C\mu},$$
$$y' = \frac{D - A\mu x'}{B\nu}, \; z' = \frac{Dn + A\gamma x'}{-C\nu},$$

γ représentant $m\nu - n\mu$. Ces valeurs reportées dans (6), donnent ces trois équations

$$C(AC\mu^2 + BC\nu^2 + AB\gamma^2)z'^2 + 2CD(Am\mu + Bn\nu)z' + D(ADm^2 + BDn^2 - AB\gamma^2) = 0 \ldots\ldots(7),$$

$$B(AC\mu^2 + BC\nu^2 + AB\gamma^2)y'^2 - 2BD(Am\gamma + C\nu)y' + D(ADm^2 + DC - AC\mu^2) = 0 \ldots\ldots(8),$$

$$A(AC\mu^2 + BC\nu^2 + AB\gamma^2)x'^2 + 2AD(Bn\gamma - C\mu)x' + D(BDn^2 + CD - BC\nu^2) = 0 \ldots\ldots(9),$$

qui donnent les racines z', z''; y', y''; x', x''. Les plans tangens

$$Ax'x + By'y + Cz'z = D, \; Ax''x + By''y + Cz''z = D$$

étant perpendiculaires, on a cette condition (Pag. 69)

$$A^2x'x'' + B^2y'y'' + C^2z'z'' = 0 \ldots\ldots(10).$$

Or les équations finales (7), (8), (9) donnent, après avoir divisé par les coefficiens de z'^2, y'^2, x'^2, et posé, pour abréger, $AC\mu^2 + BC\nu^2 + AB\gamma^2 = M$,

$$z'z'' = \frac{D(ADm^2 + BDn^2 - AB\gamma^2)}{CM},$$
$$y'y'' = \frac{D(ADm^2 + DC - AC\mu^2)}{BM},$$
$$x'x'' = \frac{D(BDn^2 + CD - BC\nu^2)}{AM};$$

ces substitutions faites dans (10), on obtient

$$\gamma^2+\mu^2+\nu^2=\frac{B(A+C)n^2+A(B+C)m^2+C(A+B)}{D},$$

et remplaçant A, B, C, D par leurs valeurs en a, b, c

$$(11)\ldots\gamma^2+\mu^2+\nu^2=a^2(n^2+1)+b^2(m^2+1)+c^2(m^2+n^2).$$

Qu'au moyen des trois équations

$$x=mz+\mu,\ y=nz+\nu,$$
$$\gamma^2+\mu^2+\nu^2=a^2(n^2+1)+b^2(m^2+1)+c^2(m^2+n^2),$$

on élimine μ et ν, et on obtiendra l'équation finale

$$x^2(n^2+1)+y^2(m^2+1)+z^2(m^2+n^2)-2mnxy-2mxz-2nyz$$
$$=a^2(n^2+1)+b^2(m^2+1)+c^2(m^2+n^2)\ldots\ldots(12),$$

qui s'étend à toutes les positions de l'arête intersection des deux plans tangens mobiles, laquelle reste toujours parallèle à elle même.

Pour le troisième point de contact x''', y''', z''', on a

$$Ax'''^2+By'''^2+Cz'''^2=D,$$
$$Ax'''x+By'''y+Cz'''z=D,$$
$$Ax'''=mCz''',\ By'''=nCz''',$$

dont les deux dernières disent que le troisième plan tangent est perpendiculaire à l'arête $x=mz+\mu$, $y=nz+\nu$; de ces équations résultent les deux suivantes

$$mx+ny+z=\frac{D}{Cz'''},$$
$$C^2z'''^2\left(\frac{m^2}{A}+\frac{n^2}{B}+\frac{1}{C}\right)=D;$$

de la seconde on déduit, en observant que $\frac{D}{A.B.C} = \frac{1}{D}$,

$$\frac{D^2}{C^2z^2} = \frac{AB + BCm^2 + ACn^2}{D} = c^2 + a^2m^2 + b^2n^2,$$

et conséquemment

$$mx + ny + z = \sqrt{c^2 + a^2m^2 + b^2n^2} \ldots\ldots (13).$$

Enfin, élevant cette équation au carré, ajoutant le résultat (12), puis divisant la somme par $m^2 + n^2 + 1$, on trouvera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

équation de la sphère engendrée par le sommet de la pyramide.

2°. *D'un point donné sur un plan incliné, mener dans ce plan une droite qui fasse, avec l'horizon, un angle donné.*

L'équation du plan incliné, est

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

celles de la droite assujétie à passer par le point donné x', y', z', sont

$$x - x' = a(z - z') \ldots\ldots (1),$$
$$y - y' = b(z - z') \ldots\ldots (2);$$

or la droite devant être dans le plan, on aura entre A, B, C, a, b, cette relation (Pag. 64)

$$Aa + Bb + C = 0 \ldots\ldots (3);$$

l'angle de la droite avec l'horizontale ou avec sa projection horizontale, a pour sinus,

$$\sin V = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},$$

en supposant la droite ramenée parallèlement à elle-même par l'origine : on déduit de là

$$1 + a^2 + b^2 = \frac{1}{\sin^2 V};$$

remplaçant a et b par leurs valeurs tirées de (1) et (2), on obtient

$$1 + \left(\frac{x-x'}{z-z'}\right)^2 + \left(\frac{y-y'}{z-z'}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 V} \ldots (4);$$

les mêmes substitutions faites dans (3), donnent

$$A\left(\frac{x-x'}{z-z'}\right) + B\left(\frac{y-y'}{z-z'}\right) + C = 0 \ldots (5).$$

Les équations (4) et (5) débarrassées des dénominateurs, prennent la forme

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 - (z-z')^2 \cot^2 V = 0 \ldots (6),$$

$$A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') = 0 \ldots (7).$$

L'équation (6) est celle d'un cône droit dont le sommet est au point x', y', z' ; l'axe de ce cône est vertical ou perpendiculaire à l'horizontal, ensorte que le demi-angle au centre de ce cône, est $100^d + V$, et les rayons des sections parallèles à la base, sont $z - z' \cot V$. La seconde équation est celle d'un plan passant par le même point. Or ces deux équations devant avoir lieu en même temps, il s'ensuit que la droite cherchée est l'intersection du cône par le plan. Ce problème admet donc généralement deux solutions : lorsque le plan est tangent au cône, la ligne de contact est celle de *plus grande pente* du plan incliné.

3°. *Trouver l'équation du sphéroïde engendré par la révolution d'une ellipse autour de son petit axe.*

La courbe génératrice étant plane, ses équation seront

$$\left.\begin{matrix} a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \\ z = 0 \end{matrix}\right\} (A);$$

on aura en outre

$$\left.\begin{matrix} y = \delta \\ x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(\delta) \end{matrix}\right\} (B),$$

$y = \delta$ étant l'équation d'un plan perpendiculaire à l'axe de rotation $2b$, et la dernière celle d'une sphère dont le centre est à l'origine, $\varphi(\delta)$ désignant une fonction de δ. Ces équations doivent avoir lieu en même temps pour que la surface soit de révolution. Si donc on élimine x, y, z, on aura

$$a^2b^2 - a^2\delta^2 + b^2\delta^2 = b^2\varphi(\delta),$$

et remplaçant δ et $\varphi(\delta)$ par leurs valeurs, la surface du sphéroïde aura pour équation

$$b^2z^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Si dans cette équation on introduit l'aplatissement α du sphéroïde, en plaçant $b = a(1 - \alpha)$, on trouvera, en développant, négligeant les puissances de α, et supposant pour plus de simplicité $a = 1$,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 - 2\alpha(-1 + x^2 + z^2) = 0,$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 - 2\alpha u' = 0,$$

équation dans laquelle α est un très-petit coefficient, et u' une fonction de x, y et z. C'est sous cette forme que l'auteur de la *Mécanique céleste* considère l'équation de la surface de la terre.

4°. Désignons par

$$x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''$$

les coordonnées de trois points pris dans l'espace, savoir,

$$M \qquad M' \qquad M'';$$

par c, c', c'' les côtés de la base du triangle de ces trois points, respectivement opposés aux angles M, M', M''; par γ, γ', γ'' les angles plans du sommet, opposés aux côtés c, c', c''; enfin par a, a', a'' les arêtes AM, AM', AM'', A étant le sommet.

On aura évidemment

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= a'^2 \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= a''^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1),$$

$$\left.\begin{aligned} (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 &= c^2 \\ (x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2 &= c'^2 \\ (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 &= c''^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (2);$$

développant les premiers membres des équations (2), réduisant à l'aide des équations (1), et mettant pour c^2, c'^2.... leurs valeurs $a'^2 + a''^2 - 2a'a'' \cos\gamma$....., on trouvera, après les réductions,

$$\left.\begin{aligned} x'x'' + y'y'' + z'z'' &= a'a'' \cos\gamma \\ xx'' + yy'' + zz'' &= aa'' \cos\gamma' \\ xx' + yy' + zz' &= aa' \cos\gamma'' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3).$$

Supposons maintenant que les côtés a, a', a'' de la pyramide trièdre, soient les coordonnées d'un certain point de l'espace, et soient XYZ, $X'Y'Z'$, $X''Y''Z''$ les angles qu'elles font avec les trois axes rectangulaires : on aura

$$\begin{aligned} x &= a\cos X, \quad y = a\cos Y, \quad z = a\cos Z \\ x' &= a'\cos X', \quad y' = a'\cos Y', \quad z = a'\cos Z' \\ x'' &= a''\cos X'', \quad y'' = a''\cos Y'', \quad z'' = a''\cos Z''; \end{aligned}$$

partant les équations (3) deviendront

$$\left.\begin{array}{l}\cos X'\cos X''+\cos Y'\cos Y''+\cos Z'\cos Z''=\cos\gamma\\ \cos X\cos X''+\cos Y\cos Y''+\cos Z\cos Z''=\cos\gamma'\\ \cos X\cos X'+\cos Y\cos Y'+\cos Z\cos Z'=\cos\gamma''\end{array}\right\}\ldots.(4).$$

D'un autre côté, si on ajoute ensemble les carrés des valeurs précédentes de x, x', x''; y, y', y''; z, z', z'', on trouvera de la manière la plus simple, les relations connues

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2X+\cos^2Y+\cos^2Z=1\\ \cos^2X'+\cos^2Y'+\cos^2Z'=1\\ \cos^2X''+\cos^2Y''+\cos^2Z''=1\end{array}\right\}\ldots..(5).$$

Les systèmes (4) et (5) renferment toutes les conditions nécessaires aux nouveaux axes supposés obliques; les hypothèses $\gamma=\gamma'=\gamma''=100^g$ les rendent rectangulaires.

Si les coordonnées du nouveau système sont x', y', z', et que x, y, z représentent les coordonnées primitives, on aura ces trois équations

$$\left.\begin{array}{l}x=x'\cos X+y'\cos X'+z'\cos X''\\ y=x'\cos Y+y'\cos Y'+z'\cos Y''\\ z=x'\cos Z+y'\cos Z'+z'\cos Z''\end{array}\right\}\ldots.(6)$$

à employer avec (4) et (5), et, dans les hypothèses... $\cos\gamma=\cos\gamma'=\cos\gamma''=0$; lorsqu'on voudra passer d'un système à un autre système d'axes rectangulaires.

Il sera bien facile de trouver le centre de la sphère circonscrite à la pyramide des quatre points A, M; M', M''; car appelant f le rayon de cette sphère, p, q, r les coordonnées du centre, on aura ce système d'équations

$$\left.\begin{array}{l}p^2+q^2+r^2=f^2\\ (p-x)^2+(q-y)^2+(r-z)^2=f^2\\ (p-x')^2+(q-y')^2+(r-z')^2=f^2\\ (p-x'')^2+(q-y'')^2+(r-z'')^2=f^2\end{array}\right\}\ldots.(1)$$

x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' étant toujours les coordonnées des points M, M', M''. Développant toutes les puissances indiquées, et de la première équation, soustrayant successivement les suivantes, on aura celles-ci

$$\begin{aligned} 2px + 2qy + 2rz - x^2 - y^2 - z^2 &= 0 \\ 2px' + 2qy' + 2rz' - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= 0 \\ 2px'' + 2qy'' + 2rz'' - x''^2 - y''^2 - z''^2 &= 0, \end{aligned}$$

auxquelles on peut donner cette forme

$$\left.\begin{aligned} x\left(p - \frac{x}{2}\right) + y\left(q - \frac{y}{2}\right) + z\left(r - \frac{z}{2}\right) &= 0 \\ x'\left(p - \frac{x'}{2}\right) + y'\left(q - \frac{y'}{2}\right) + z'\left(r - \frac{z'}{2}\right) &= 0 \\ x''\left(p - \frac{x''}{2}\right) + y''\left(q - \frac{y''}{2}\right) + z''\left(r - \frac{z''}{2}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2).$$

La première des équations (2), par exemple, est celle d'un plan assujéti à passer par le milieu de la corde AM, qui a pour coordonnées $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$: ainsi les plans dans lesquels est situé le centre cherché, passent par les milieux des arêtes du tétraèdre inscrit : reste à trouver la position de ces plans. Les équations des projections verticales de la droite AM, passant par l'origine A et par le point x, y, z, sont

$$p = \frac{x}{z} r, \quad q = \frac{y}{z} r :$$

de plus, le plan qui passe par le milieu de AM, c'est-à-dire, la première du système (2), a pour équation de ses traces sur les mêmes plans coordonnés,

$$\begin{aligned} p - \frac{x^2 + y^2}{2x} &= -\frac{z}{x}\left(r - \frac{z}{2}\right) \\ q - \frac{x^2 + y^2}{2y} &= -\frac{z}{y}\left(r - \frac{z}{2}\right), \end{aligned}$$

les traces et les projections étant respectivement perpendiculaires, on doit conclure que le centre de la sphère passant par quatre points donnés, est à l'intersection même des plans menés perpendiculairement aux milieux des trois droites qui joignent ces points.

5°. L'équation de la sphère est, en plaçant l'origine des coordonnées au centre,

$$x^2+y^2+z^2=r;$$

celle d'un plan est

$$z=Ax+By+D;$$

les projections de la génératrice du cône supposée passer par un point $x'=0, y'=0, -z'$, sont

$$x=a(z+z'),\ y=b(z+z').$$

Ainsi les coordonnées de l'intersection de cette ligne et du plan seront

$$x=\frac{a(D+z')}{1-Aa-Bb},\ y=\frac{b(D+z')}{1-Aa-Bb},\ z=\frac{Aaz'+Bbz'+D}{1-Aa-Bb};$$

substituant ces coordonnées dans l'équation de la sphère, et éliminant a et b au moyen des équations de la génératrice, on aura cette équation :

$$x^2+y^2+\frac{(Az'x+Bz'y+D(z+z'))^2}{(D+z')^2}=\frac{r^2(z+z'-Ax-By)^2}{(D+z')^2}\ldots(M)$$

de la surface conique qui a pour base un cercle quelconque de la sphère, puisqu'elle exprime la relation entre les coordonnées communes à la droite, au plan et à la sphère, les coefficiens A, B, D étant indéterminés.

En faisant $z'=r$, on exprime que le sommet du cône est

à la surface de la sphère ; ainsi l'équation (M) devient

$$x^2+y^2+\frac{(Arx+Bry+D(z+r))^2}{(D+r)^2}=\frac{r^2(z+r-Ax-By)^2}{(D+r)^2}\ldots(M').$$

Si pour avoir l'équation de la courbe suivant laquelle la surface conique rencontre le plan des xy, on fait $z=0$, on trouvera

$$x^2+y^2+\frac{2Ar^2x}{D+r}+\frac{2Br^2y}{D+r}=\frac{(r-D)\,r^2}{D+r}\ldots\ldots(1).$$

Ainsi l'œil étant placé à la surface de la sphère, le cône des rayons visuels menés à tous les points d'un cercle quelconque de la sphère, est coupé par le plan de perspective suivant un cercle : cette intersection est ce qu'on appelle *projection stéréographique*.

Pour les grands cercles de la sphère, on a $D=0$, et l'équation (1) devient

$$x^2+y^2+2Arx+2Bry=r^2,$$

et faisant $x_1-A=x$, $y_1-B=y$, $r=1$,

$$x_1^2+y_1^2=1+A^2+B^2.$$

L'œil étant au centre de la sphère, on a $z'=0$, et si d'ailleurs on combine $z=r$ avec l'équation (M), celle-ci deviendra

$$x^2+y^2+r^2=\frac{r^2}{D^2}(r-Ax-By)^2;$$

elle représentera la projection stéréographique d'un cercle quelconque sur un plan tangent à la sphère, et perpendiculaire à l'axe du cône visuel, ou à *l'axe optique*.

L'œil étant à une distance infinie du centre de la sphère,

toujours sur l'axe des z, on a $z' = \infty$, et l'équation (M) devient

$$x^2 + y^2 + (Ax + By + D)^2 = r^2,$$

c'est-à-dire, celle d'une surface cylindrique qui passe par la courbe d'intersection de la sphère et du plan. Lorsque le plan sécant se confond avec le plan horizontal, on a $A = 0$, $B = 0$, $D = 0$, et on trouve

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

On peut voir pour de plus amples détails le chapitre Ier de l'excellent *Traité de Topographie, d'Arpentage et de Nivellement*, par *L. Puissant*, professeur de Mathématiques à l'Ecole militaire de Fontainebleau, lequel fait suite à son *Traité de Géodésie*.

Des courbes considérées dans l'espace.

170. Les courbes dans l'espace, résultent toujours ou peuvent toujours être censées résulter de l'intersection de deux surfaces, comme la ligne droite dans l'espace résulte de l'intersection des deux plans projetans : les surfaces dont la courbe de pénétration est celle de l'espace, seront les cylindres projetans de la courbe, c'est-à-dire, les cylindres droits ayant pour bases les projections de cette courbe sur deux des plans de projection.

Qu'on coupe, par exemple, la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

par le plan

$$Ax + By + Cz = D,$$

on aura une courbe plane dans l'espace, dont il sera facile d'obtenir les projections sur les plans coordonnés : à cet effet,

on éliminera alternativement une des trois coordonnées x, y, z; en prenant sa valeur dans l'équation du plan et la portant dans celle de la sphère ; de cette manière, on trouvera ces trois équations

$$y^2 + z^2 + \left(\frac{D - By - Cz}{A}\right)^2 = r^2$$

$$x^2 + z^2 + \left(\frac{D - Ax - Cz}{B}\right)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{D - Ax - By}{C}\right)^2 = r^2,$$

dont deux quelconques donnent toujours la troisième, ce qui prouve que deux projections suffisent : elles représentent des ellipses, ainsi qu'on peut s'en assurer sur les coefficiens des carrés y^2, x^2 et du rectangle xy. Les cylindres qui auraient ces courbes pour bases, se couperaient deux à deux suivant la courbe intersection de la sphère par le plan.

171. Souvent la courbe intersection de deux surfaces courbes n'a pas tous ses points dans un plan ; les géomètres la nomment alors *courbe à double courbure ;* telle est, par exemple, l'intersection d'une sphère et d'un cylindre droit, lorsque l'axe du cylindre ne passe pas par le centre de la sphère; tels sont encore le méridien terrestre et la perpendiculaire à la méridienne, dans le cas du sphéroïde quelconque.

Considérons donc une sphère ayant son centre à l'origine des coordonnées, et un cylindre ayant pour base dans le plan des xy, un cercle : les équations de ces surfaces seront

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$
$$2ax - x^2 = y^2.$$

Nous pourrons supposer que la circonférence du cylindre passe par le centre de la sphère, et, de plus, $a > r$, afin de faciliter la détermination des limites de la courbe de pénétration.

Les projections de ces surfaces sur les plans des xz et des

xy, seront les résultats de l'élimination successive de y et de z entre les deux équations ci-dessus, c'est-à-dire,

$$\left.\begin{aligned} 2ax + z^2 &= r^2 \\ 2ax - x^2 &= y^2 \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \begin{cases} z = \sqrt{r^2 - 2ax} \\ y = \sqrt{2ax - x^2}; \end{cases}$$

la première projection est une parabole indéfinie du côté des abscisses négatives, et qui est limitée dans le sens des x positives, par $x = \frac{r^2}{2a}$; la seconde est comprise toute entière entre $x = 0$ et $x = 2a$; il résulte de là que la courbe de l'espace, qui cesse d'être réelle par y ou par z, ne s'étend du côté des abscisses positives que jusqu'à une distance du plan des yz, égale à $\frac{r^2}{2a}$.

Il reste à rechercher si la courbe en question est ou non comprise dans un plan, ce qui revient à examiner si elle peut être l'intersection d'un plan et d'un cylindre élevé sur l'une de ses projections. Si l'on désigne toujours le plan par

$$Ax + By + Cz = D,$$

la combinaison de cette équation avec la suivante

$$2ax + z^2 = r^2,$$

donnera pour projection de l'intersection sur le plan des yz,

$$A\frac{(r^2 - z^2)}{2a} + By + Cz = D;$$

et cette courbe devrait coïncider dans tous ses points avec la projection de celle de l'espace sur le même plan des $y\ z$, laquelle a pour équation

$$r^2 - z^2 - \frac{(r^2 - z^2)^2}{4a^2} = y^2:$$

or de la première on déduit

$$y = \frac{2aD - Ar^2 - 2aCz + Az^2}{2aB}$$

valeur qui reportée dans la seconde, donne

$$\left(\frac{2aD - Ar^2 - 2aCz + Az^2}{2aB}\right)^2 = r^2 - z^2 - \frac{(r^2 - z^2)^2}{4a^2}$$

laquelle se réduit à la forme

$$Pz^4 + Qz^3 + Rz^2 + Sz + T = 0.$$

Or cette équation devant être vérifiée par toutes les valeurs de z, ou devant avoir lieu indépendamment de z, il faut nécessairement qu'on ait ces cinq conditions

$$P = 0,\ Q = 0,\ R = 0,\ S = 0,\ T = 0,$$

et comme aucune d'elles ne rentre dans l'autre, on ne peut déterminer les coefficiens A, B, C, D de manière à satisfaire à toutes en même temps. Donc la courbe d'intersection de la sphère et du cylindre, ne peut être dans un plan. Voyez le traité des courbes à double courbure de *Clairaut* et les leçons de *Monge*.

172. Le méridien terrestre d'un lieu, est la suite des points de la surface de la terre, qui ont leur zénith sur une circonférence déterminée par un plan passant par l'axe de rotation de la terre et par le zénith de ce lieu, plan prolongé jusqu'aux limites de la sphère céleste : vu l'immense grandeur du rayon de la sphère étoilée, les verticales de tous ces points peuvent être censées parallèles au plan du méridien céleste, ensorte que le méridien terrestre est une courbe formée par la jonction des piés de toutes les verticales parallèles au plan du méridien céleste, et qui aboutissent à sa circonférence. Si la terre est un sphéroïde irrégulier, auquel cas les normales à la surface ne rencontrent pas l'axe de rotation, cette courbe est *à double courbure*; dans le cas contraire, elle est une courbe plane.

CHAPITRE XVIII.

Rayons de courbure des courbes du premier ordre.

173. Nous reprendrons le problème des tangentes parce que cette question sert en quelque sorte d'introduction à la théorie générale *des contacts*, que nous n'étendrons ici qu'aux sections coniques; et, pour sauver toute difficulté, nous nous proposerons d'abord de mener une tangente à la parabole : nous généraliserons ensuite la solution, et enfin nous passerons à la détermination des élémens du cercle qui touche le plus intimement possible, une section conique, et qu'on nomme à cause de cette propriété, *cercle osculateur*. Ce chapitre ne suppose que ce qui a été démontré. (*Alg. première section* chap. XXI).

174. Soit donc l'équation de la parabole

$$y^2 = mx, \text{ ou } y = \sqrt{mx}$$

et celle d'une droite

$$q = ap + b,$$

q étant l'ordonnée et p l'abscisse, la parabole et la droite étant d'ailleurs rapportées à une même origine : la condition d'un point commun à la droite et à la parabole, donne $p = x$ et $q = y$, ensorte qu'on a cette première équation de condition

$$m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = ax + b \ldots\ldots (1),$$

qui sert à déterminer l'une des deux constantes de la droite.

Supposons maintenant que dans les deux équations ;

$$y = m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}, \quad y = ax + b$$

on change x en $x \pm i$, i étant supposé très-petit ; par là on considérera sur la droite et sur la courbe deux points situés très-près l'un à droite et l'autre à gauche du point commun ; les développemens ordonnés suivant les puissances ascendantes de i, seront

$$m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} i + Pi^2 + Qi^3 + \text{etc.}$$
$$ax + b + ai$$

P, Q etc. étant des coefficiens faciles à former ; si à la condition (1), on ajoute celle-ci

$$\frac{m^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}} = a \ldots\ldots\ldots (2)$$

la différence entre les ordonnées de la droite et de la courbe pour les abscisses $x \pm 1$, c'est-à-dire, $Pi^2 + Qi^3 + \text{etc.}$, sera d'autant plus petite, que l'intervalle i sera plus petit, puisqu'on a égalé les deux premiers termes des développemens qui sont les plus grands ; cette droite ainsi menée, jouit de la propriété qu'aucune autre droite ne peut être menée entre elle et la courbe ; car soit

$$s = nr + h$$

l'équation d'une seconde droite : si on veut déterminer m et n d'après la condition que les deux développemens

$$m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} i + Pi^2 + \text{etc.}$$
$$nx + h + ni$$

coincident autant qu'il est possible, on trouvera pour n et h les mêmes déterminations que pour a et b, d'où l'on conclura que cette seconde droite se confond avec la première. Mais parce qu'on peut toujours prendre i tellement petit que le terme Pi^2 donne son signe au reste du développement, la

différence $Pi^2 \pm Qi^3 +$ etc. entre les coordonnées de la droite et de la courbe correspondantes aux abscisses $x \pm i$, de même signe en passant de la droite à la gauche de l'ordonnée y du point commun, indique que la droite est toute entière située ou au-dessus ou au-dessous de la courbe par rapport à l'axe ; donc cette droite est tangente.

Des équations (1) et (2) on déduit

$$a = \frac{m^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}}, \quad b = \frac{m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{2};$$

reportant ces valeurs de a et de b dans l'équation de la droite, après avoir changé x en x' pour désigner le point de contact ou de tangence, et écrit y pour q et x pour p, on trouve

$$y = \frac{m^{\frac{1}{2}}}{2x'^{\frac{1}{2}}}x + \frac{m^{\frac{1}{2}}x'^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{m}{2m^{\frac{1}{2}}x'^{\frac{1}{2}}}x + \frac{mx'}{2m^{\frac{1}{2}}x'^{\frac{1}{2}}}$$

mais l'équation de la parabole devenant pour le point x', y',

$$y' = m^{\frac{1}{2}}x'^{\frac{1}{2}};$$

l'équation de la tangente se change dans celle-ci

$$y = \frac{m}{2y'}(x + x') :$$

c'est celle qu'on a trouvée (chap. XI).

175. Résolvons la même question sur l'équation générale

$$y = (mx^n + n)^{\frac{1}{n}}$$

des sections coniques qui ont un centre : en y changeant x en $x \pm i$, on a ces développemens des ordonnées de la

courbe et la droite, situées à des distances $+i$, $-i$, de l'ordonnée du point commun, savoir

$$(mx^2+n)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{mx}{(mx^2+n)^{\frac{1}{2}}} i + Pi^2 \pm Ri^3 + \text{etc.}$$

et

$$ax + b \pm ai :$$

pour de très-petites valeurs de i, on a ces conditions du contact le plus intime entre la courbe et la droite, au point x', y',

$$ax' + b = (mx'^2+n)^{\frac{1}{2}}, \quad a = \frac{mx'}{(mx'^2+n)^{\frac{1}{2}}}$$

d'où l'on déduit

$$b = \frac{n}{(mx'^2+n)^{\frac{1}{2}}}$$

ensorte que l'équation de la droite devient par ces valeurs de a et b,

$$y = \frac{mx'x+n}{(mx'^2+n)^{\frac{1}{2}}}, \text{ ou } y'y - mx'x - n = 0,$$

équation générale des tangentes aux courbes du premier ordre. Le reste du développement, savoir $Pi^2 \pm Ri^3 + \text{etc.}$, mesure toujours la différence entre les ordonnées de la droite et celles de la courbe, correspondantes aux abscisses $x+i$, ou $x-i$; et comme en supposant i très-petit, cette différence se rapporte à deux points extrêmement voisins à droite et à gauche du point commun, on voit que, puisqu'elle reste de même signe, tous les points de la droite sont au-dessus ou au-dessous des points de la courbe par rapport à l'axe, et qu'il n'existe d'ailleurs qu'un seul point qui soit en même temps sur l'une et l'autre ligne. Ces considérations sont au moins aussi simples que celles dont on on est parti dans le chap. XI, et elles ont d'ailleurs l'avantage de préparer à la théorie générale des contacts, qu'on donne dans le calcul différentiel.

176. Cherchons maintenant les coordonnées du centre et le rayon d'un cercle qui ait relativement aux cercles, la même propriété que la tangente à l'égard des lignes droites; les Géomètres le nomment *cercle osculateur*, ou *cercle de courbure*, parce qu'il sert à mesurer la courbure de la courbe dans ses différens points, laquelle est en raison inverse du rayon de ce cercle, qu'on appelle *rayon de courbure*.

Reprenons l'équation générale des sections coniques

$$y=(mx^2+n)^{\frac{1}{2}}$$

et celle d'un cercle dont les coordonnées du centre soient a et b, le rayon r et les coordonnées générales p et q; ce cercle sera représenté par

$$(q-b)^2+(p-a)^2=r^2, \text{ d'où } q=b+\sqrt{r^2-(p-a)^2},$$

p, q ayant même origine que x et y; pour donner au cercle et à la courbe un point commun, on fera $p=x$ et $q=y$, d'où résulte cette première équation de condition

$$(mx^2+n)^{\frac{1}{2}}=b+\sqrt{r^2-(x-a)^2}\ldots\ldots(1)$$

supposons ensuite $x=x\pm i$, et développons les ordonnées correspondantes de la courbe et du cercle suivant les puissances croissantes de i; on trouvera, en ne calculant que les coefficiens de i et i^2,

$$(mx^2+n)^{\frac{1}{2}}\pm\frac{mx}{(mx^2+n)^{\frac{1}{2}}}i+\frac{mn}{2(mx^2+n)^{\frac{3}{2}}}i^2\pm Pi^3+Ri^4\pm\text{etc.}$$

$$b+\sqrt{r^2-(x-a)^2}\mp\frac{x-a}{\{r^2-(x-a)^2\}^{\frac{1}{2}}}i$$

$$-\frac{r^2}{2\{r^2-(x-a)^2\}^{\frac{3}{2}}}i^2\pm P'i^3+R'i^4\pm\text{etc.}$$

et comme le cercle ne renferme que les trois constantes a, b, r, on ne peut égaler plus de trois termes de ces développemens ; mais parce que i étant supposé très-petit, les premiers terme sont les plus grands, on aura donc la plus petite différence possible entre les deux développemens, sous la première condition jointe aux deux suivantes

$$\frac{mx}{(mx^2+n)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{x-a}{\left\{r^2-(x-a)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (2)$$

$$\frac{mn}{(mx^2+n)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{r^2}{\left\{r^2-(x-a)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \ldots\ldots (3),$$

on déduit aisément de ces relations

$$r = \frac{\left\{mx^2(1+m)+n\right\}^{\frac{3}{2}}}{mn} \ldots\ldots (M).$$

Il est visible qu'aucun autre cercle ne peut passer entre la courbe proposée et le cercle déterminé de grandeur et de position par ces valeurs de a, b, r, puisque, pour la détermination des trois constantes du premier cercle, on serait conduit aux mêmes équations (1), (2) et (3) ; par conséquent le nouveau cercle coïnciderait dans tous ses points avec celui qu'on vient de déterminer.

On tire des équations (2) et (1) ces valeurs de a et b en r,

$$a = x - \frac{rmx}{\left\{mx^2(1+m)+n\right\}^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (4)$$

$$b = y - \frac{(mr^2x^2+n)^{\frac{1}{2}}}{\left\{mx^2(1+m)+n\right\}^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (5)$$

Si on regarde le rayon r comme donné, il ne reste plus d'arbitraires, et l'on en conclura que le cercle donné dont le

centre est déterminé par les coordonnées a et b, est tel qu'entre lui et la courbe, on ne peut faire passer aucun autre arc de même rayon, mais placé différemment : car pour un autre cercle de rayon r rapporté aux coordonnées c et d, on aurait les mêmes équations de condition (1) et (2), lesquelles donneraient c et d en place de a et b, et conséquemment le même centre. Donc le cercle dn rayon r sera tangent à la section conique au point x, y, mais il n'aura pas avec cette courbe le contact le plus intime, c'est-à-dire, qu'on pourra faire passer entre ce cercle et la courbe un autre cercle, par exemple, celui dont la position et le rayon seraient déterminés par les équations (1), (2) et (3), puisque l'égalité d'un plus grand nombre des premiers termes des deux développemens, rend plus petite la différence entre l'ordonnée de la courbe et celle du cercle pour une même abscisse. A proprement parler, dit *Lagrange*, dans la *théorie des fonctions*, où l'on trouve cette doctrine exposée avec beaucoup de détails, ces courbes ne coïncident que dans le point où les ordonnées sont égales, et l'égalité des second, troisième, etc. termes, ne les rend pas plus coïncidentes dans d'autres points, mais elle les fait approcher de manière que tout autre cercle, par exemple, pour lequel les mêmes égalités n'auraient pas lieu, ne puisse passer entre celui-là et la courbe.

Comme les équations (4) et (5) ont lieu quel que soit r, on peut regarder ce rayon comme indéterminé dans les valeurs de a et b; alors a et b seront les coordonnées d'une droite donnée par l'élimination de r, droite qui sera représentée par

$$y - y' = -\frac{2y'}{2nx' + m}(x - x') :$$

cette ligne, lieu des centres de tous les cercles tangens à la courbe, est la normale. Dans les trois sections coniques, le rayon de courbure est égal au cube de la normale, divisé par le quart du carré du paramètre.

Pour l'ellipse, le rayon de courbure a pour expression,

$$r = \frac{\{a^4 - x^2(a^2 - b^2)\}^{\frac{3}{2}}}{a^4 b} = \frac{a^2}{b^4} N^3,$$

N désignant la normale ; et si l'on nomme φ l'angle formé avec le grand axe, par une ligne r' menée du centre de l'ellipse au point x, y, auquel cas $x = r' \cos \varphi$, on trouve cette autre expression

$$r = \frac{\{a^4 - r'^2(a^2 - b^2)\cos^2\varphi\}^{\frac{3}{2}}}{a^4 b} :$$

si l'on pose $\frac{a-b}{b} = \alpha$, α étant une quantité très-petite pour des ellipses peu aplaties, on a, à très-peu près $r' = a$, ce qui serait rigoureusement vrai pour la sphère ; donc, dans ce cas

$$r = \frac{\{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi\}^{\frac{3}{2}}}{ab} :$$

mettant pour a sa valeur $b(1+\alpha)$ et rejetant les puissances de α, supérieures à la première, on a

$$r = b\frac{\{1 + 2\alpha \sin^2\varphi\}^{\frac{3}{2}}}{1+\alpha} = b\frac{\{1 + 3\alpha\sin^2\varphi + \text{etc.}\}}{1 - \alpha + \text{etc.}}$$
$$= b\{1 - \alpha(1 - 3\sin^2\varphi)\}.$$

cette expression ne renfermant plus que la variable φ, qui augmente en allant de l'extrémité du grand axe à l'extrémité du petit, ou de l'équateur au pôle sur un même méridien, les rayons de courbure vont donc aussi en croissant dans le même sens ; et comme les arcs qui répondent au même nombre de degrés dans différens cercles, sont proportionnels en longueur aux rayons de ces cercles, il s'ensuit que les degrés du méridien croissent de l'équateur au pôle dans le même rapport. Voyez l'*Astronomie physique* par *Biot*, et le n° 7 de la *Correspondance sur l'Ecole impériale polytechnique*.

Notes sur le plan.

Iere. Soit une droite passant par l'origine des coordonnées, ayant conséquemment pour équations de ses projections sur les plans des xz et des yz,

$$(1)\ldots\ldots x = az,\quad y = bz\ldots\ldots(2);$$

si l'on multiplie (1) par λ et qu'on ajoute le produit à (2), on aura ce résultat

$$\lambda x + y = (\lambda a + b)\,z,\ \text{d'où}\ z = \frac{\lambda}{\lambda a + b}x + \frac{1}{\lambda a + b}y\ldots(3);$$

et si l'on fait

$$\frac{\lambda}{\lambda a + b} = A;\ \frac{1}{\lambda a + b} = B,\ \text{d'où}\ \frac{A}{B} = \lambda,$$

l'équation (3) prendra cette forme

$$z = Ax + By\ldots\ldots(4).$$

Mais pour un facteur λ déterminé, si on pose le dénominateur commun

$$\lambda a + b = m,$$

m étant un nombre donné, pour toutes les valeurs attribuées à a et celles qu'on conclura pour b, les coefficiens A et B ne varieront pas ; ensorte que la droite (1) et (2), dans toutes ses positions, sera sur la surface représentée par (4). Cette propriété caractérise une surface plane ; donc l'équation (4) représente un plan : A et B sont les tangentes trigonométriques des angles faits par ses traces sur les plans xz, yz, avec des parallèles aux axes des x et des y. Si on suppose que ce plan se meuve parallèlement à lui-même, z deviendra $z + D$; ensorte qu'ajoutant D aux deux membres de (4), et faisant $z + D = z$, le plan, dans la position la plus générale, sera représenté par

$$z = Ax + By + D.$$

II. Pour que la ligne

$$x = az + \alpha, \; y = bz + \mathcal{C}$$

soit dans le plan

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

il faut que ces coordonnées conviennent au plan, c'est-à-dire, qu'on ait

$$A(az + \alpha) + B(bz + \mathcal{C}) + Cz + D = 0;$$

ou bien

$$(Aa + Bb + C)z + A\alpha + B\mathcal{C} + D = 0:$$

mais la coordonnée z devant être quelconque, cette équation se partage dans celles-ci,

$$(1)\ldots Aa + Bb + C = 0, \; A\alpha + B\mathcal{C} + D = 0, \ldots (2)$$

qui sont les conditions trouvées autrement dans le texte : la seconde a toujours lieu, lorsque la ligne et le plan passent par l'origine. Si le même plan doit passer par une seconde ligne

$$x = a'z + \alpha', \; y = b'z + \mathcal{C}'$$

on a

$$(3)\ldots Aa' + Bb' + C = 0, \; A\alpha' + B\mathcal{C}' + D = 0 \ldots (4).$$

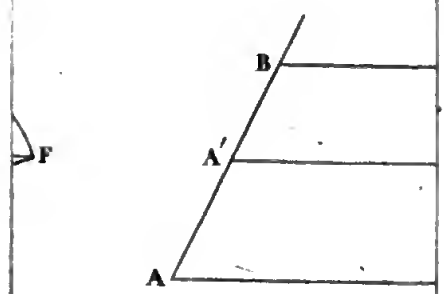
Les conditions (1), (2), (3) et (4) donnent celle-ci

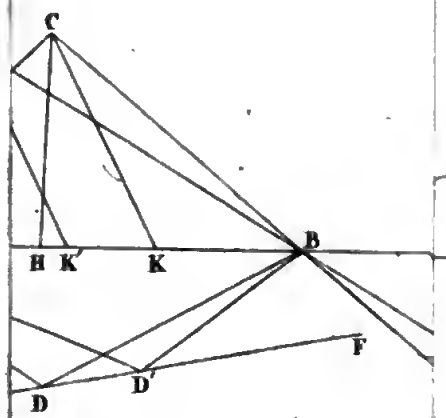
$$(a - a')(\mathcal{C} - \mathcal{C}') - (b - b')(\alpha - \alpha')$$

qui exprime que les deux droites doivent se couper, si elles ne sont pas parallèles.

FIN.

608103





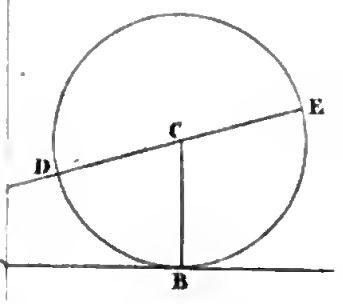


Fig. 6.

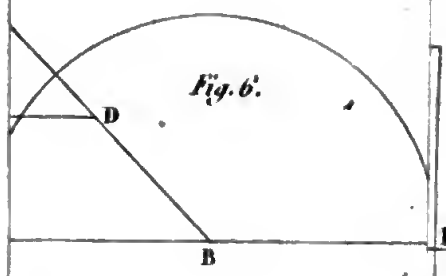
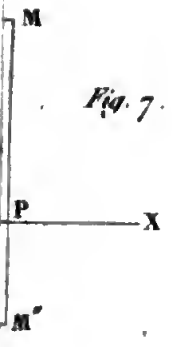
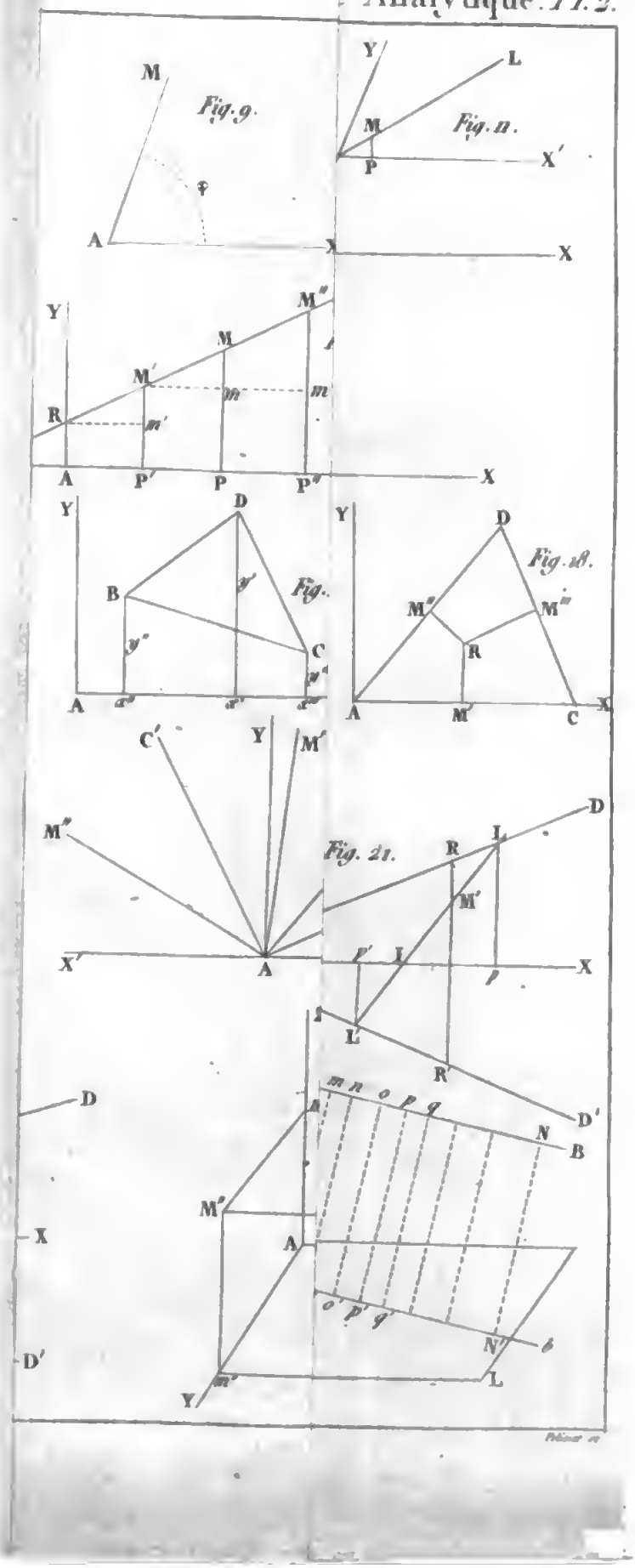
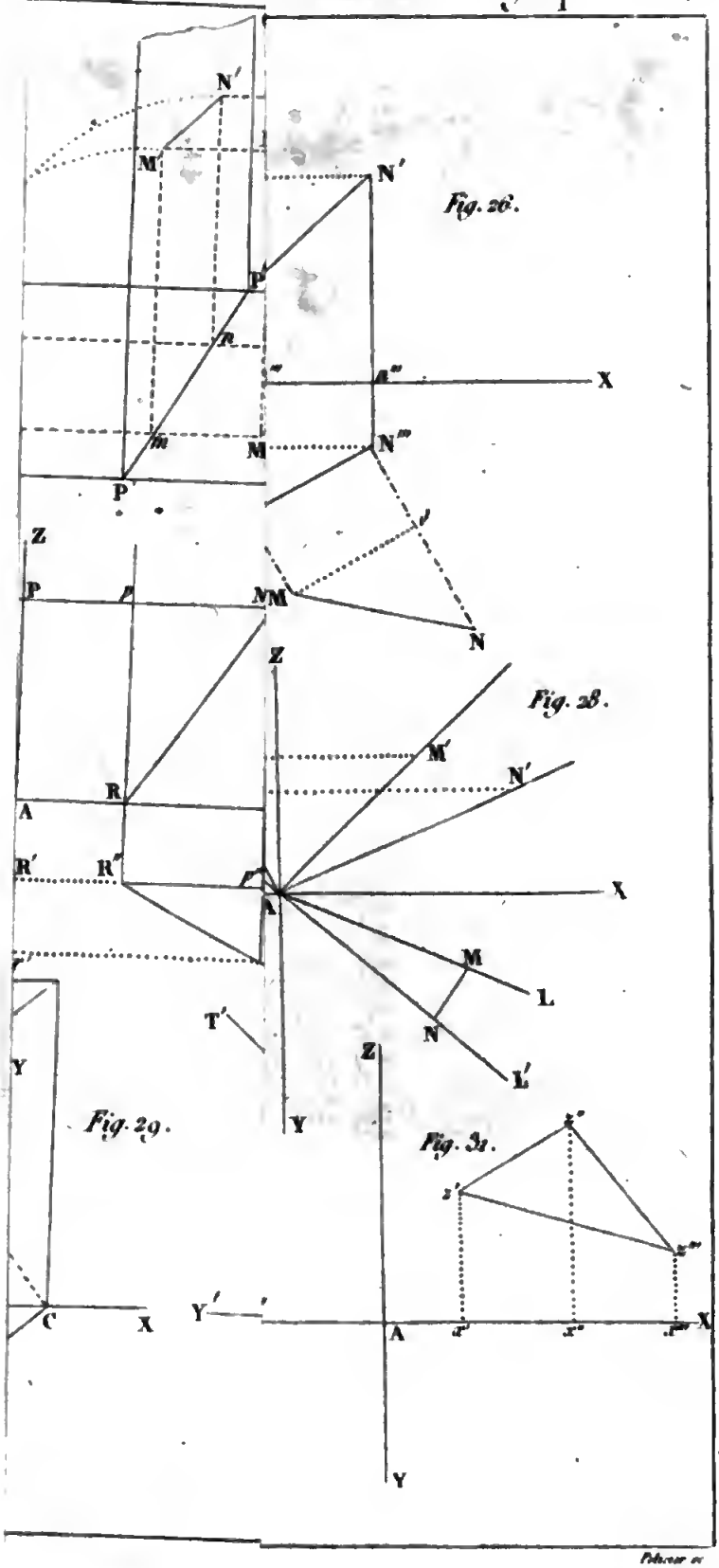


Fig. 7.




M
Fig. 9.
A
X
Y
L
M
Fig. 10.
P
X'
X
Y
M''
M
M'
m
m'
R
A
P'
P
P''
X
Y
D
B
y'
Fig.
y''
C
A
Y
D
Fig. 18.
M''
M'''
R
A
M'
C
X
C'
Y
M'
M''
Fig. 21.
D
R
L
M'
X'
A
P'
I
P
X
L
R
D
m n o p q
A
D'
N
B
M''
X
A
o' p' q'
N'
b
D'
m''
L
Y


N'
M'
N'
P
R
X
m
M
N'''
P
Z
P
M
N
Fig. 28.
Z
M'
N'
R
A
R'
R''
X
M
L
T'
N
L'
Y
Z
Fig. 29.
Y
Fig. 31.
C
X
Y'
A
X
Y

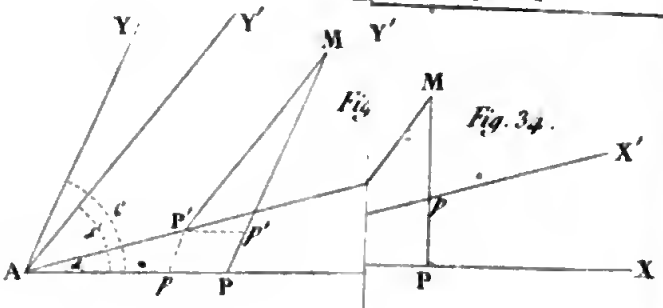
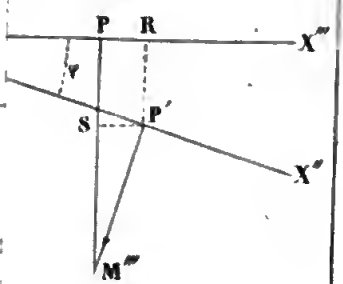


Fig. 34.

Fig. 37.



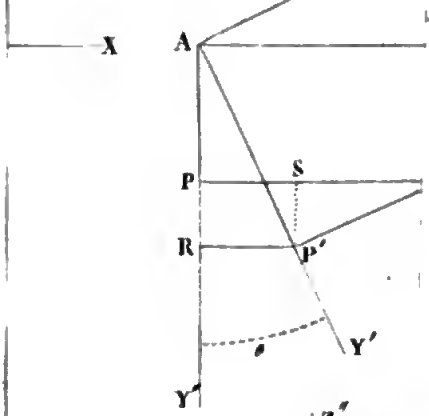


Fig. 38.

Fig. 39.

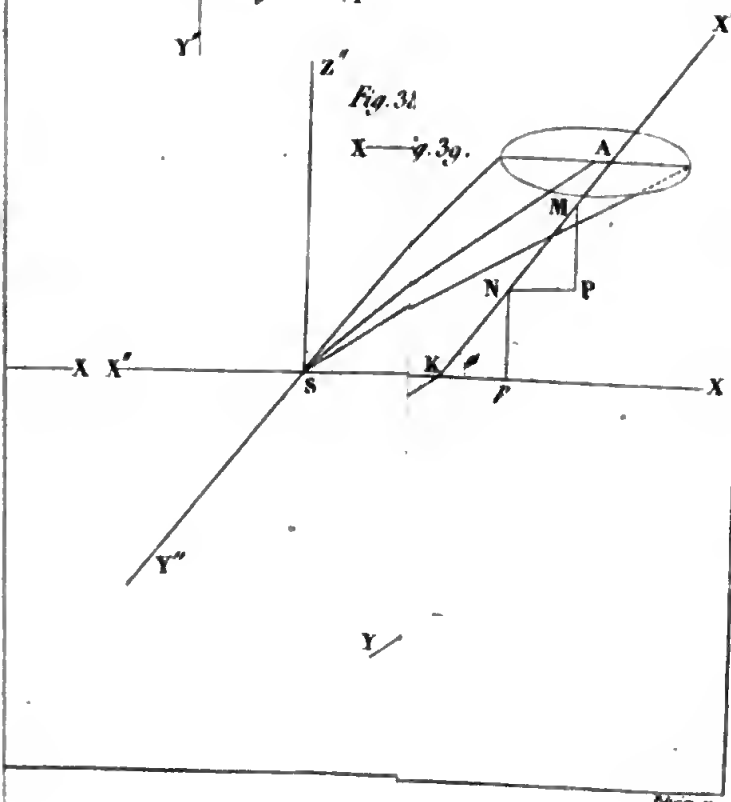


Fig. 40.

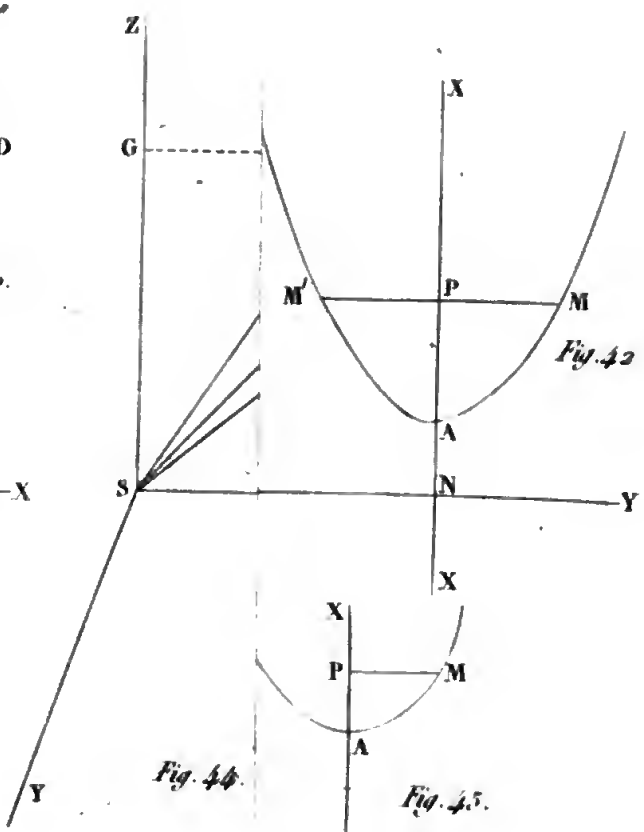


Fig. 42

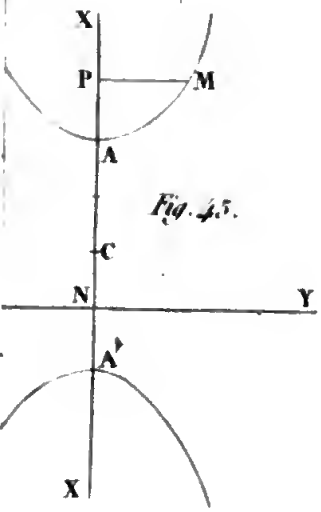
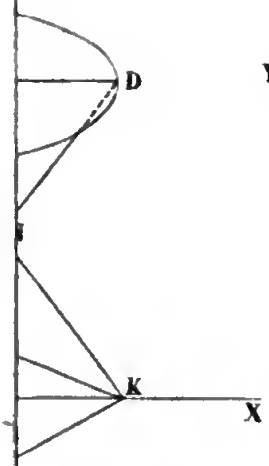
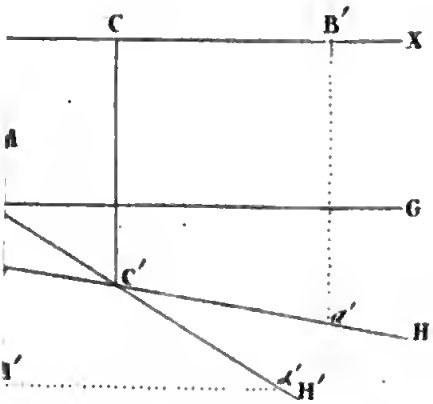
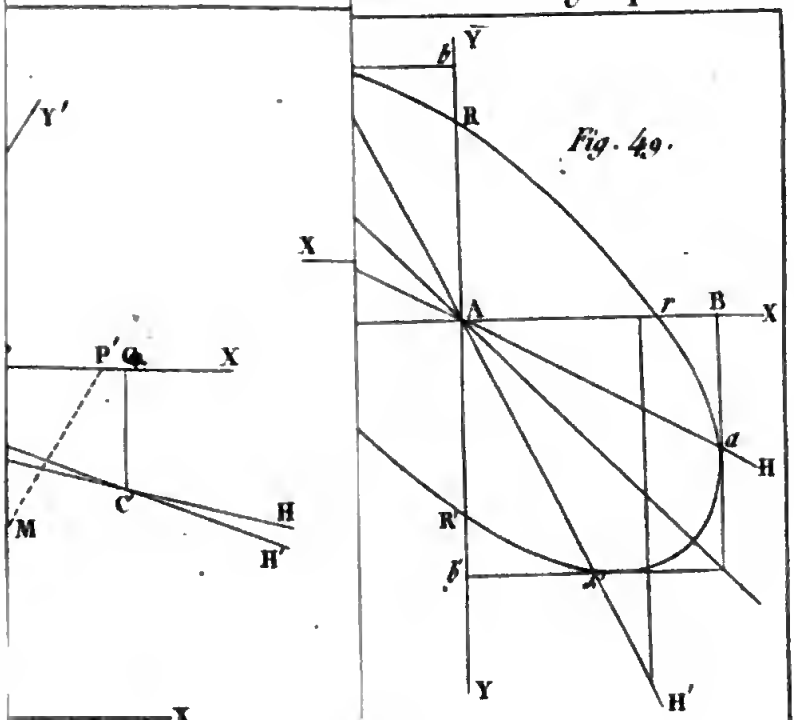


Fig. 44.

Fig. 45.






Y'
P'
X
M
C
H
H'
b
Y
R
Fig. 49.
X
A
r
B
X
a
H
R'
b'
Y
H'

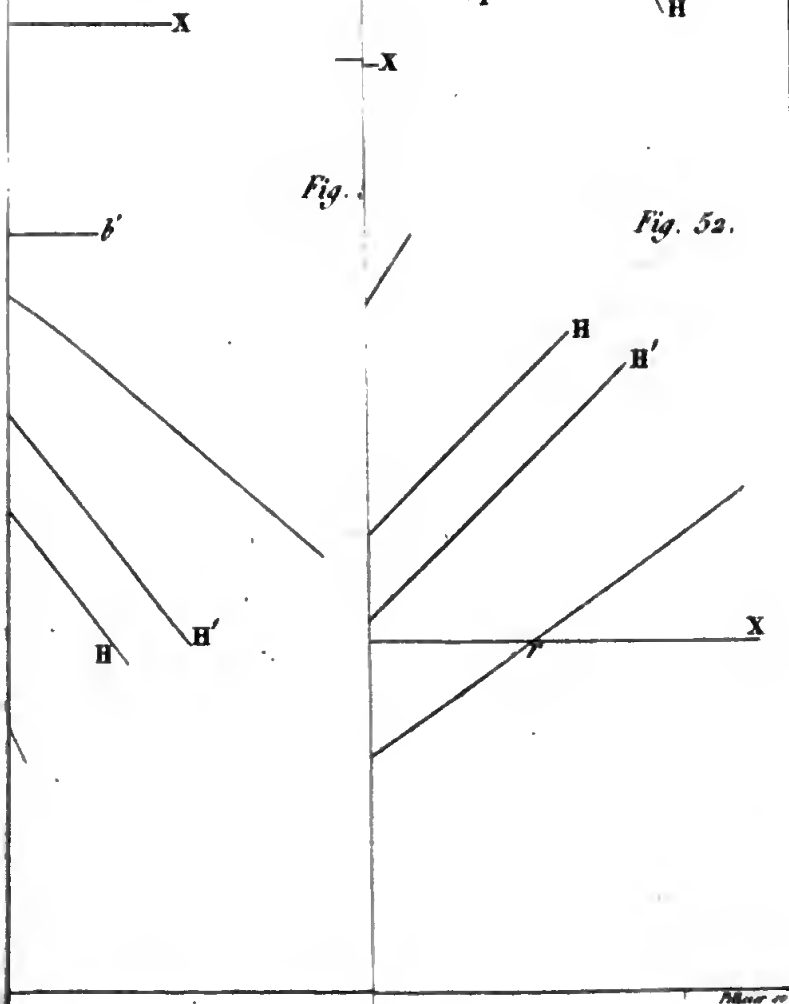

X
X
Fig.
Fig. 52.
b'
H
H'
H
H'
X

Fig. 54.

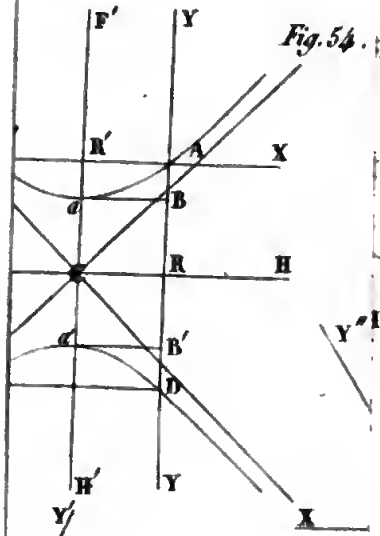


Fig. 58.

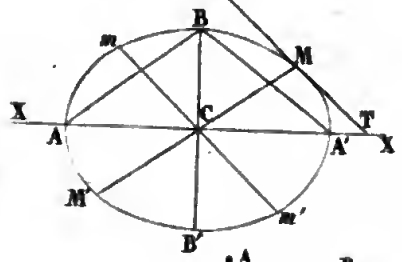


Fig. 61.

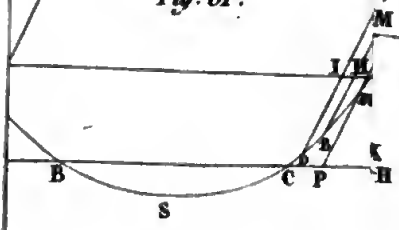


Fig. 65.

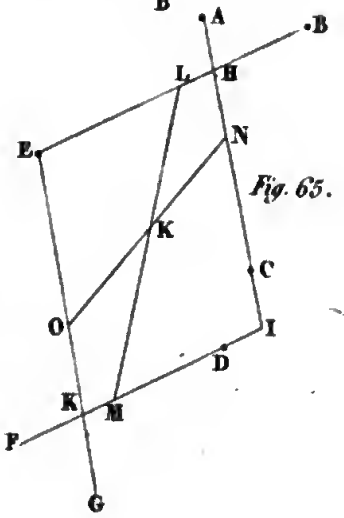
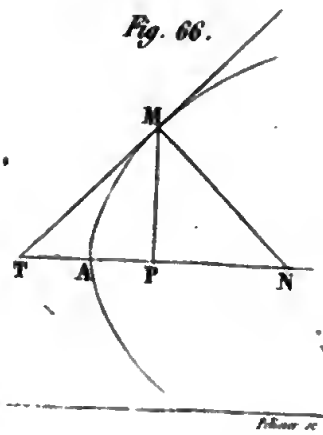


Fig. 66.



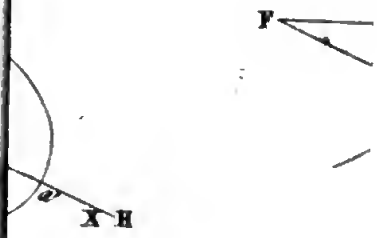


Fig. 68.

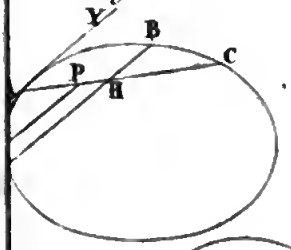


Fig. 70.

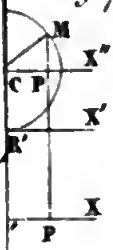
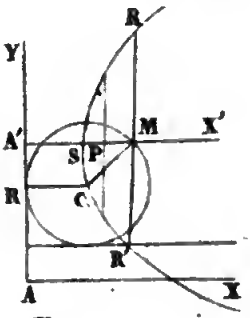


Fig. 71.



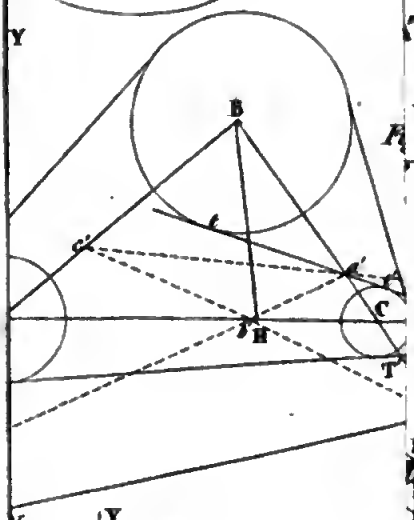


Fig. 74.

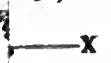
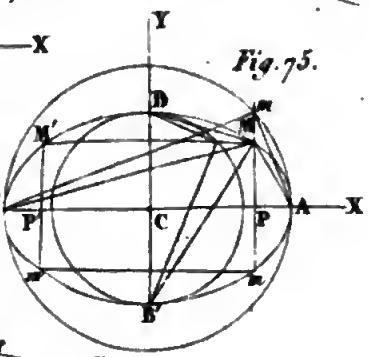


Fig. 75.



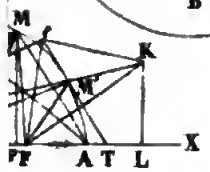


Fig. 78.

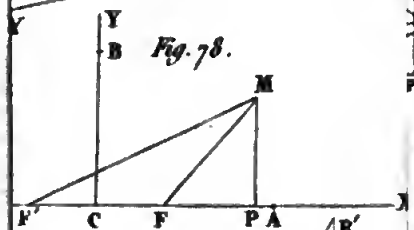
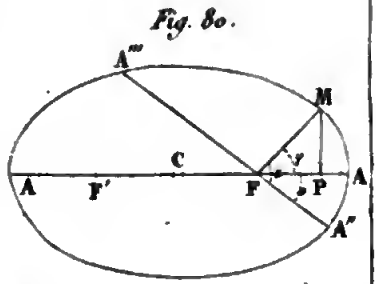


Fig. 80.



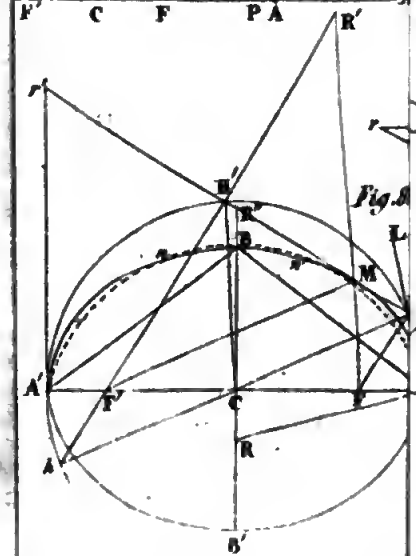


Fig. 8

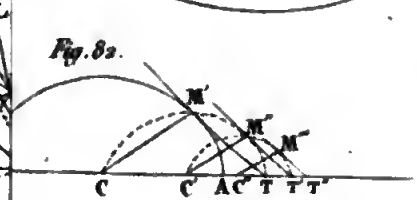


Fig. 82.

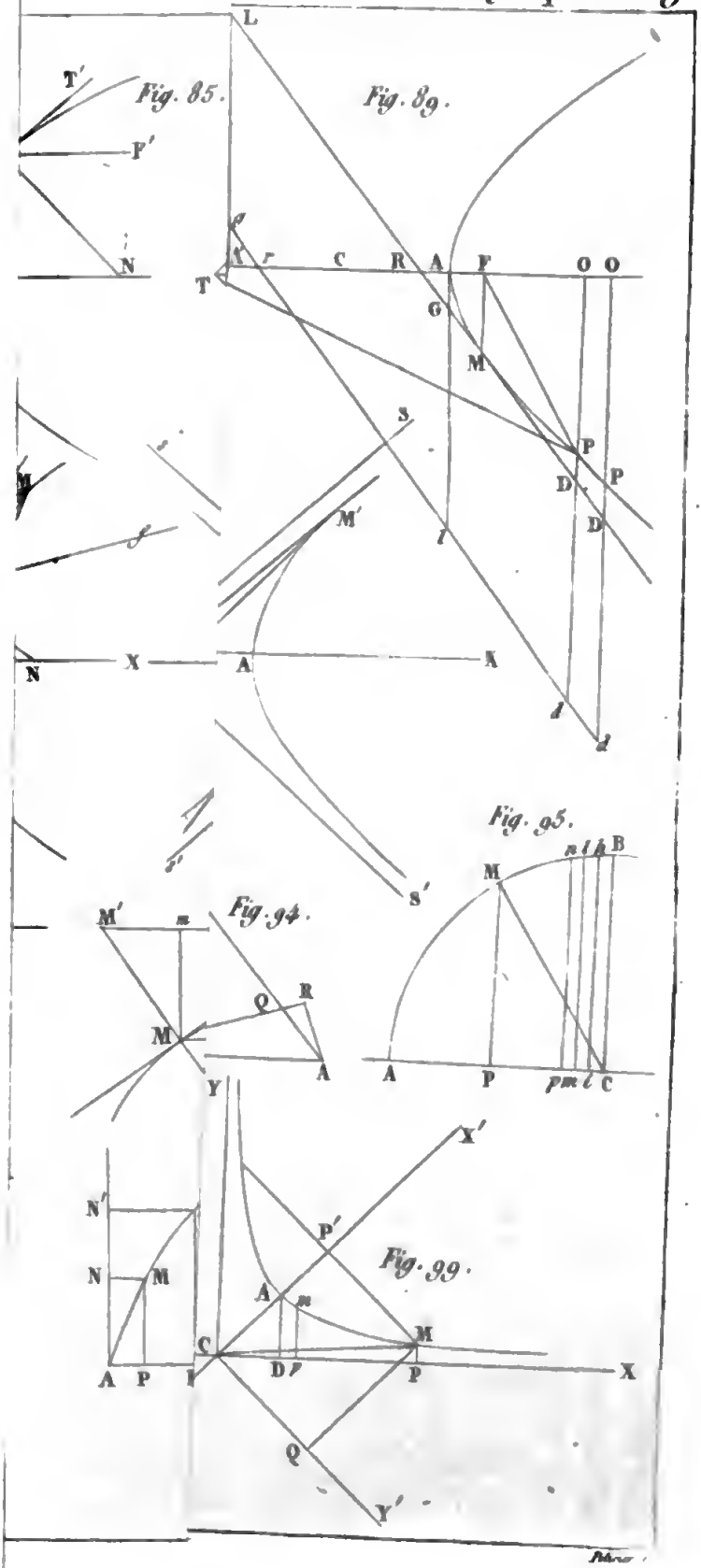


Fig. 85.
T'
P'
N
Fig. 89.
L
T
G
M
P
D
M'
S
N
X
A
Fig. 94.
M'
n
Q
R
M
Y
Fig. 95.
M
B
A
P
C
Fig. 99.
N'
N
M
P'
X'
A
n
C
D
P
X
Q
Y'